JAN-ERIK ROOS

FÖRELÄSNINGAR I HOMOLOGISK ALGEBRA. HT. 1961.

(Redigerade under medverkan av SVEN SPANNE.)

DEL I.

LUND 1962

MATEMATISKA INSTITUTIONEN

INNEHÅLLSFÖRTECKNING.

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Föreläsningar i homologisk algebra
HT 1961 Jan-Erik Roos

KAPITEL 0. INLEDNING.
(2 september 1961)

Lineär algebra över en fix kropp k, dvs. teori för vektorrum över k och lineära avbildningar mellan sådana rum, är en mycket välkänd och betydelsefull gren av matematiken. De viktigaste tillämpningsområdena är teori för lineära ekvationssystem, matriser, determinanter, kvadratiska former, grupprepresentationer och kropputvidgningar. (Se t.ex. Birkhoff-MacLane, A Survey of Modern Algebra; Bourbaki, Algèbre; Gel'fand, Lectures on Linear Algebra och van der Waerden, Algebra I-II.)

De matematiska objekt, som uppfyller axiomen för vektorrum, där k ersatts med en ring Λ, kallas för moduler över Λ. Till exempel kan varje abelsk grupp betraktas som en modul över ringen av de hela talen (Kap. 1). För moduler är de vanligaste satserna för vektorrum (existens av bas, dualitet mm.)i allmänhet ej sanna, men man har ofta behov av att kunna säga någonting även i modulfallet. Även om man begränsar sig a priori till lineär algebra över k, leds man nämligen till modulproblem. Exempel: Studiet av lineära representationer av en grupp G i vektorrum över k är ekvivalent med studiet av moduler över $k[G]$, gruppringen av G över k (Kap.1)

Men det är framförallt topologien, som levererat modulproblem för vilka lineär algebra över en kropp ej varit tillräcklig (Kap.2). Speciella algebraiska lösningsmetoder har då fått användas. Se Čech [3] och Künneth [18].

Omkring 1940 börjar en väsentlig utveckling av algebran; man försöker överföra så mycket topologi, som möjligt till algebran. Det är sålunda omkring 1943, som Eilenberg-MacLane [5], och oberoende av dem H. Hopf [5] och Eckmann [5] inför homologi- och kohomologigrupper för godtyckliga abstrakta grupper. År 1945 gör Hochschild samma sak för associativa algebror [5], och Eilenberg-Chevalley [5] studerar senare Lie-algebror i samma anda.

Dessa grupper fick tidigt stor användning i t. ex. Galoisteori, teori för grupputvidgningar och algebraisk topologi [5]. Explicit beräkning av några av dem visade att de i allmänhet mäter avvikelsen från någon enkel algebraisk lag.

Det var tidigt klart, att de tre teorierna hade mycket gemensamt, men det var först omkring 1950, som H. Cartan och Eilenberg lyckades genomföra en syntes av dem [6], [2]. Deras nya, rent algebraiska teori presenterades 1956 i en nu klassisk bok [2], vars titel Homological Algebra är naturlig enligt det föregående.

Det visade sig, att moduler över en ring Λ, spelade en väsentlig roll, och Cartan-Eilenbergs teori kan betraktas, som en metod att mäta avvikelsen för satser, sanna för vektorrum, att vara riktiga även i modulfallet. En väsentlig roll spelar härvid kategoribegreppet, som införts tidigare av Eilenberg-MacLane [7]. Man betraktar nämligen alla moduler över en fix ring Λ, och alla modulhomomorfismer mellan sådana moduler som en enhet, kategori, i vilken man vill studera ovannämnda avvikelseproblem.

Härvid är man mindre intresserad av modulerna själva än av avbildningarna mellan dem, och ännu mindre intresserad är man av elementen i en modul. Allmännare kategorier definierar man genom att ställa axiom på abstrakt givna mängder av avbildningar, och i det allmänna fallet kan man ej tala om element i ett objekt i en kategori på samma sätt som man kan tala om vektorer i ett vektorrum.

Mycket viktiga är även vissa avbildningar mellan kategorier, s.k.

funktorer, och de ovannämnda avvikelserna mätes med s. k. deriverade funktorer, liksom avvikelsen för en reell funktion från att vara lineär mätes med de deriverade funktionerna (liknelsen haltar litet). Homologi- och kohomologigrupper erhålles sedan som derivator av lämpligt valda funktorer.

Vi kommer i det följande, i motsats till vad som i allmänhet är fallet i existerande litteratur [2] [20] försöka göra en mycket konkret och samtidigt välmotiverad framställning av den homologiska algebran. Vi skall i kap. 1 skriva upp de viktigaste satserna för vektorrum, ge motexempel till dem i modulfallet, och sedan undersöka vad man trots allt kan säga i detta fall. På så sätt leds vi naturligt till de viktigaste begreppen i [2]. I de senare kapitlen följer så den allmänna teorien.

Det är ingen idé, att på detta stadium ge en detaljerad översikt av den kraftiga utvecklingen av den homologiska algebran, som följt på Cartan-Eilenbergs bok. Vi nöjer oss här med att påpeka, att de väsentligaste bidragen kommit från Grothendieck [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16] och Serre [21], [22], [23], [24], [25], och att Lerays spektralsviter [19], som redan fanns med i [2] visat sig alltmer betydelsefulla. För närvarande har homologisk algebra fundamentala tillämpningar i:

1) Den moderna algebraiska geometrien, vilken även innefattar talteori och abstrakt algebra, [10], [11], [12], [13], [14], [24], [25], [26]. Låt oss endast nämna ett exempel. Riemann har studerat den s. k. zetafunktionen, som för Re s > 1 ges av

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$$

och för andra s genom analytisk fortsättning. Funktionen har nollställen i -2, -4, -6, ... och väsentlig för studiet av primtalens fördelning är frågan om alla övriga nollställen har realdelen = 1/2 (Riemanns hypotes). Inspirerad av Weil [27] har Grothendieck infört ett slags kohomologigrupper för de hela talen. Med hjälp av dessa kan t. ex. Riemanns funktionalekvation

$$\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\,\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma((1-s)/2)\,\zeta(1-s)$$

tolkas som en dualitet för Weilkohomologien, analog med Poincarés dualitetssats för vanliga topologiska mångfalder och vanlig kohomologi. Det är mycket troligt, att riktigheten av Riemanns hypotes, snart kommer att kunna avgöras med dessa metoder.

2) Topologien, och speciellt den algebraiska topologien. [1, a, d, e, f] Den s.k. Čech-Leray-Cartanska kohomologiteorien för topologiska rum, med allmänna koefficienter (faisceaux) hade tidigare [1, a], [19] en ganska obskyr motivering, och gav endast tillfredsställande resultat för parakompakta rum, alltmedan man hade behov av en teori för allmännare rum i den algebraiska geometrien [24]. Grothendieck [10] har generaliserat denna teori till godtyckliga topologiska rum, och erhåller kohomologigrupperna som deriverade funktorer. Som biprodukt får man ett enkelt och konceptuellt mycket tillfredsställande bevis för en berömd sats av de Rham om möjligheten att beräkna den reella kohomologien av en differentierbar mångfald med hjälp av differentialformer. [17, p.181]. Slutligen har icke lineär (homologisk) algebra, med viktiga tillämpningar i algebraisk topologi utvecklats av Dold och Puppe [4].

3) Teorien för analytiska mångfalder (allmännare: analytiska mängder) och därmed teorien för funktioner av flera komplexa variabler, [1, b, c, g]. Vi påpekar endast, att Grothendieck har funnit ett rent algebraiskt bevis för existensen av "modulrum" till Riemannska ytor av fixt genus g.

Dessutom har den homologiska algebran ställt problem för logiker och grundlagsforskare [28]. En del av dessa problem har lösts av Grothendieck (se [8]).

Tillämpningarna inom analysen, är bortsett från 3) och analytisk talteori (där för övrigt ännu ingenting publicerats) ganska fåtaliga. En av orsakerna till detta är följande:

Låt f vara en lineär avbildning mellan två Λ-moduler E och F:

$$E \xrightarrow{f} F$$

Då inducerar f en Λ-isomorfism:

(AB) $\qquad E/\mathrm{Ker} f \xrightarrow[\sim]{\bar{f}} \mathrm{Im} f \quad (\mathrm{Ker} f = f^{-1}(O),\ \mathrm{Im} f = f(E)\ ),$

och denna likhet är väsentlig vid utarbetandet av homologisk algebra. (Hela tekniken med s.k. exakta sviter, bygger på detta faktum).

Om nu E och F är t.ex. Banachrum, och f kontinuerlig, så är $\bar{f}$ i allmänhet ej en topologisk isomorfism.

Exempel: $E = C[0, 1]$ och $F = L^1(0, 1)$. Låt f vara avbildningen, som till varje $\varphi \in E$ ordnar motsvarande ekvivalensklass i F. Det är klart, att f är kontinuerlig och lineär. Dessutom är $\mathrm{Ker}\, f = O$. Om (AB) vore sann, så vore $f(E) \cong E$ fullständig och alltså sluten i F ($f(E)$ är givetvis försedd med den inducerade topologien). Men eftersom $f(E)$ är tät i F, innebär detta att $f(E) = \overline{f(E)} = F$. Alltså måste varje Lebesgueintegrerbar funktion på $[0, 1]$ vara kontinuerlig efter korrektion på en nollmängd, vilket onekligen verkar lite suspekt.

När man en gång funnit en metod, att för en given kategori mäta avvikelsen från (AB), så kan man hoppas på intressanta tillämpningar i funktionalanalysen.

------O------O------

LITTERATURFÖRTECKNING

[1] H. CARTAN, Seminarier ENS, a)1950-51, b)1951-52, c)1953-54, d)1954-55 e)1958-59, f)1959-60, g)1960-61.

[2] H. CARTAN-EILENBERG, Homological Algebra, Princeton 1956.

[3] ČECH, Les groupes de Betti d'un complexe infini. Fund. Math. 25(1935), 33-44.

[4] DOLD-PUPPE, Homologie nicht-additiver Funktoren. Ann. Inst. Fourier 11(1961), 201-312.

[5] EILENBERG, Topological Methods in Abstract Algebra. Cohomology Theory of Groups. Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), 3-37. (Detta är en översiktsartikel, och alla hänvisningar [5], avser antingen artikeln själv, eller dess litteraturförteckning).

[6] EILENBERG, Bourbakiseminarium nr 46 (1951).

[7] EILENBERG-MACLANE, General Theory of Natural Equivalences. Trans. Amer. Math. Soc. 58(1945), 231-294.

[8] GABRIEL, Des catégories abéliennes. Thèse, Paris 1961.

[9] GROTHENDIECK, Seminarium ENS, 1957.

[10] GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique. Tôh. Math. J. 9(1957), 119-221.

[11] GROTHENDIECK, The Cohomology Theory of Abstract Algebraic Varieties. Proc. Int. Congr. Math. 1958, 103-118.

[12] GROTHENDIECK (tillsammans med DIEUDONNE) Eléments de Géométrie Algébrique, Publ. IHES, Paris 1960 -

[13] GROTHENDIECK, Bourbakiseminarier nr 182, 190, 195, 212, 221 (1959-61).

[14] GROTHENDIECK, Seminarium IHES, 1960-61.

[15] GROTHENDIECK, Föredrag i Bonn 1961.

[16] Bok om homologisk algebra under utarbetande (tillsammans med CHEVALLE

[17] GODEMENT, Théorie des faisceaux, Paris 1958.

[18] KÜNNETH, Über die Bettischen Zahlen einer Produktmannigfaltigkeit. Math. Ann. 90(1923), 65-85 och Über die Torsionszahlen von Produkt-Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 91(1924), 125-134.

[19] LERAY, L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue. Journ. de Math. Pures et Appl. 29(1950), 1-139.

[20] NORTHCOTT, An Introduction to Homological Algebra. Cambridge 1960.

[21] SERRE, Homologie singulière des espaces fibrés. Applications. Ann. of Math. 54(1951), 425-505.

[22] SERRE, Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. Ann. of Math. 58(1953), 258-294.

[23] SERRE, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane. Comment. Math. Helv. 27(1953), 198-232.

[24] Serre, Faisceaux algébriques cohérents [illegible]

[25] SERRE, Groupes proalgébriques. Publ IHES 7, Paris 1960.

[26] TATE, The higher dimensional cohomology groups of class field theory. Ann. of Math. 65(1952), ~~294~~-297.

[27] WEIL, Number of solutions of equations in finite fields. Bull. Amer. Math. Soc. 55(1949), 497-508.

[28] MACLANE, Locally small categories and the foundations of set theory. Proc. Symp. on Foundations of Mathematics, Warszawa 1959, 25-43.

----O--------O-------O----

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Föreläsningar i homologisk algebra
HT 1961 Jan-Erik Roos
(redigerade under medverkan av
Sven Spanne)

KAPITEL 1. INLEDANDE DEFINITIONER OCH SATSER.

(2, 9 och 16 september 1961)

§ 1. Λ-moduler. Låt k vara en kropp och U, V, W vektorrum över k. Då gäller som bekant följande viktiga satser.

Sats A. Det finns en bas för V.

Sats B. Låt W vara ett lineärt underrum till V. Då kan varje lineär avbildning från W till ett lineärt rum U utvidgas till en lineär avbildning från V till U.

Sats B är en omedelbar följd av sats A.

Som nämnts i kap. 0 är det intressant att studera vad som gäller motsvarande satserna A och B, när man ersatt k med en ring Λ.

Vi börjar med några definitioner. Låt Λ vara en ring med enhet 1.

Definition. En abelsk grupp M kallas en (unitär, vänster) Λ-modul om det finns en avbildning $\varphi : \Lambda \times M \to M$ som uppfyller följande axiom: (Vi skriver $\varphi(\lambda, m) = \lambda \circ m$).

1) $\lambda \circ (m_1+m_2) = \lambda \circ m_1 + \lambda \circ m_2$

2) $(\lambda_1+\lambda_2) \circ m = \lambda_1 \circ m + \lambda_2 \circ m$

3) $\lambda_1 \circ (\lambda_2 \circ m) = (\lambda_1 \circ \lambda_2) \circ m$

4) $1 \circ m = m$.

Exempel 1. Varje abelsk grupp M kan betraktas som en Z modul, eftersom km är definierat för varje heltal k och varje $m \in M$, och, som lätt inses, axiomen 1) - 4) är uppfyllda.

Exempel 2. Låt G vara en ändlig grupp. Betrakta mängden av formella lineärkombinationer

$$\Sigma n_g g \quad , \quad n_g \in Z \, ; \quad g \in G$$

med addition definierad genom

$$(\Sigma n_g g) + (\Sigma m_g g) = \Sigma (n_g + m_g) g \; .$$

Vi använder gruppstrukturen på G för att definiera en multiplikation genom

$$(\Sigma n_g g)(\Sigma m_{g'} g') = \Sigma n_g m_{g'} g \cdot g'$$

Vi har alltså konstruerat en ring $Z[G]$, davgruppringen av G över Z.

På motsvarande sätt definieras en gruppring av G över en godtycklig ring $\Lambda : \Lambda[G]$.

Låt k vara en kropp och K en ändlig Galois utvidgning av k (se Bourbaki, Algèbre Chap. V, § 10, n° 1) samt G Galoisgruppen för K med avseende på k. G opererar då på K och K kan betraktas, som en $Z[G]$-modul, om vi definierar

$$(\Sigma n_g g) \cdot x = \Sigma n_g \cdot (g \cdot x), \quad x \in K \; .$$

Dessutom är K en $k[G]$-modul, och det gäller att

$$K = k[G] \; .$$ Innebörd? Obs. att G ej vitsut är abelsk

(Detta är ekvivalent med satsen om existens av normalbas för Galoisutvidgningar. Se Bourbaki, Algèbre Chap. V, § 10, n° 8.)

§ 2. Fria Λ-moduler och Sats A.

Vi kommer nu att undersöka Sats A i allmänna fallet, och inför därför några enkla begrepp.

Låt M vara en Λ-modul.

Definition. Familjen $(m_\alpha)_{\alpha \in I}$ av element i M säges vara fri eller lineärt oberoende om för varje familj $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in I}$ där nästan alla $\lambda_\alpha = 0$,

$$\Sigma \lambda_\alpha \cdot m_\alpha = 0 \Rightarrow \lambda_\alpha = 0 \text{ för varje } \alpha \in I.$$

Familjen $(m_\alpha)_{\alpha \in I}$ säges generera M eller vara ett generatorsystem till M om varje $m \in M$ kan skrivas

$$m = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha m_\alpha \quad \text{där nästan alla } \lambda_\alpha = 0$$

(nästan alla = alla utom ändligt många).

Familjen $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ säges vara en Λ-bas till M om den är lineärt oberoende och genererar M.

Om M har en bas, säger vi att M är fri. Om $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$ är en bas för M, är framställningen $m = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha e_\alpha$ entydig.

Låt oss nu undersöka om sats A kan utvidgas till Λmoduler.

Proposition 1. Det finns en Z modul, som ej har någon bas.

Bevis: Antag $Z_2 = Z/2Z$ = de hela talen modulo 2 har en bas. (Vi sätter allmännare $Z_n = Z/nZ$.) Den måste då bestå av elementet $\bar{1}$, restklassen av 1 modulo 2.

Men $\bar{1} = 1 \cdot \bar{1} = 3 \cdot \bar{1} = 5 \cdot \bar{1} = \ldots$

Framställningen av $\bar{1}$ är alltså ej entydig, och det finns ingen bas i Z_2.

Allmännare

Proposition 2. Låt Λ vara en ring utan nolldelare, M en Λ-modul som innehåller element $m \neq 0$ med $\lambda m = 0$ för något $\lambda \neq 0$. Då är M ej Λ-fri.

Bevis: Antag att det finns en bas $(e_\alpha)_{\alpha \in I}$. Då är

$$m = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha e_\alpha .$$

Eftersom $m \neq 0$, finns ett $\alpha^* \in I$, så $\lambda_{\alpha^*} \neq 0$.

$$0 = \lambda \cdot m = \Sigma (\lambda \lambda_\alpha) \cdot e_\alpha .$$

Men $\lambda \lambda_{\alpha^*} \neq 0$, eftersom Λ saknar nolldelare. Motsägelse, ty

$$0 = \Sigma\, 0 \cdot e_\alpha .$$

Vi ser alltså, att vi befinner oss långt ifrån vektorrumfallet.. Man kunde tänka sig få en fri modul genom att eliminera de m som uppfyller villkoren i proposition 2. Vi inför därför ytterligare några definitioner, (som f.ö. är de samma som de i vektorrumfallet).

delmodul **Definition.** En <u>under-modul</u> (egentligen under Λ-modul) N till en Λ-modul M är en undergrupp till M sådan att

$$\lambda n \in N \text{ om } \lambda \in \Lambda \text{ och } n \in N.$$

För varje undermodul N kan vi bilda kvotgruppen M/N, och det är lätt att se, hur den kan ges en kanonisk Λ modulstruktur. Vi talar om <u>kvot(Λ)-modulen</u> M/N.
faktormodul

Låt oss nu återvända till situationen i proposition 2, dvs.

$$\Lambda \quad \text{saknar nolldelare},$$

$$M \quad \Lambda\text{-modul},$$

$$M_T = \{m \in M;\ \exists\ \lambda \neq 0,\ \lambda m = 0\}$$

är då en undermodul till M, om Λ dessutom är kommutativ, vilket vi nu förutsätter. (Vi påminner om att en kommutativ ring med enhet utan nolldelare även kallas integritetsområde.) M_T kallas <u>torsionsundermodulen</u> till M.

Kvoten M/M_T saknar nu torsion, dvs. det finns inga $m \neq 0$ och $\lambda \neq 0$ så $\lambda \cdot m = 0$, men den är trots detta i allmänhet ej fri.

<u>Exempel.</u> $\Lambda = Z$

$M = Q$ (rationella talen)

$Q_T = \{0\}$

$Q/Q_T = Q$ är ej fri. Det finns inget element som Z-genererar Q, och varje par av element i Q är lineärt beroende över Z. Om de är $p/q \neq 0$ och $p'/q' \neq 0$, så är

$$p'q\,(p/q) + (-pq')(p'/q') = 0$$

och $p'q$ och $-pq' \in Z$, $\neq 0$.

Men om M/M_T har ett ändligt antal generatorer och Λ är en principalring (integritetsområde där varje ideal är principalt), så är M/M_T fri. (Se Bourbaki, Algèbre, Chap. VI, §4, Th. 2, Cor. 2.)

§ 3. Sats B, Λ-homomorfismer, exakta sviter, kommutativa diagram och injektiva Λ-moduler.

Vi skall nu formulera om sats B och inför därför några begrepp.

M, N Λ -moduler.

Definition. En grupphomomorfism $f : M \to N$ säges vara en **Λ -homomorfism** om

$$f(\lambda \circ m) = \lambda \circ f(m)$$

Vi skriver

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) = \{ \text{alla } \Lambda\text{-homomorfismer } M \to N \} .$$

Vi definierar för f_1 och f_2 i $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$, $f_1 + f_2 \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ genom

$$(f_1+f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m) \quad , \quad m \in M .$$

$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ blir då en Z-modul.

Om Λ är kommutativ, blir funktionen $\lambda \circ f$, definierad genom

$$(\lambda \circ f)(m) = \lambda \circ f(m) \qquad m \in M$$

en Λ-homomorfism, och $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$ kan ges en naturlig Λ -modul-struktur.

Proposition 3. Om $f : M \to N$ är en Λ- homomorfism, är

$f^{-1}(0)$ en undermodul till M

och $f(M)$ en undermodul till N.

Bevis: Övning.

Beteckning.

Kärnan av $f = \mathrm{Ker}\, f = f^{-1}(0)$.

Bilden av $f = \mathrm{Im}\, f = f(M)$.

Vi påminner om att en mängdteoretisk avbildning $f : X \to Y$ säges vara

injektiv om $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,

surjektiv om $f(X) = Y$,

bijektiv om både injektiv och surjektiv.

Det är lätt att se att för en Λ-homomorfism $f : M \to N$ gäller

$$f \text{ injektiv } \Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = 0,$$

$$f \text{ surjektiv } \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = N.$$

Vi vet att f har en invers f^{-1} då och endast då f är bijektiv. Det är lätt att se, att om bijektionen f är en Λ homomorfism, är f^{-1} också en Λ-homomorfism. Vi gör följande

Definition: Λ - homomorfismen $M \xrightarrow{f} N$ kallas för en isomorfism, om det finns en Λ -homomorfism $N \xrightarrow{g} M$ så att $gf = id_M$, $fg = id_N$.

Vi skriver då $M \xrightarrow[\sim]{f} N$. Enligt det föregående är $f \in \operatorname{Hom}_\Lambda(M, N)$ en isomorfism då och endast då f är bijektiv.

Vi inför nu ett mycket viktigt begrepp.

Definition: Låt $f : L \to M$ och $g : M \to N$ vara Λ-homomorfismer. Vi säger att

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

är en exakt svit om

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g.$$

Det är klart hur denna definition generaliseras till sviter av fler än tre Λ -moduler: $L_0 \to L_1 \to L_2 \to L_3 \to \dots \to L_n$.

Exempel: Homomorfismen

$f : M \to N$ är

$$\text{injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \to M \xrightarrow{f} N \text{ är exakt},$$

$$\text{surjektiv} \quad \Leftrightarrow \quad M \xrightarrow{f} N \to 0 \text{ är exakt}.$$

Om L är en under Λ-modul till M, så är sviten

$$0 \to L \xrightarrow{i} M \quad \text{exakt}$$

där i är den naturliga injektionen.

$$\operatorname{Im} i \simeq L.$$

Om N är en kvot av M, så är

$$M \xrightarrow{p} N \to 0 \quad \text{exakt}$$

där p är den naturliga projektionen.

$$M/\mathrm{Ker}\, p \cong N.$$

Att sviten

$$E : 0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

är exakt innebär definitionsmässigt, att alla

$$0 \rightarrow L \xrightarrow{f} M$$

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

$$M \xrightarrow{g} N \rightarrow 0$$

är exakta, dvs.

f är injektiv,

$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ och g surjektiv, vilket medför att $f(L)$ är en undermodul till M isomorf med L och att $M/f(L) \xrightarrow{\sim} N$.

Omvänt, implicerar $L \subset M$ att $0 \rightarrow L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} M/L \rightarrow 0$ är exakt.

Definition: En mängd Λ-moduler $L, M, N, R, S, ..$ och Λ-homomorfismer $e, f, g, h, k, l, ..$

$$\begin{tikzcd} & \vdots & \vdots & & \\ \ldots & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"] & M \ldots \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "e"] & & \\ \ldots & R \arrow[r, "h"] & N \arrow[r, "l"] & S \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$

säges bilda ett kommutativt diagram, om alla möjligheter, att få fram en homomorfism mellan två fixa Λ-moduler genom komposition av homomorfismer i diagrammet ger samma resultat, dvs. $gf = hk,\ lg = e, \ldots$.

Inom teorin för vektorrum V över k betraktar man ofta det duala rummet

$$\mathrm{Hom}_k(V, k) .$$

Vi studerar nu allmännare

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \text{ för } \Lambda\text{-moduler } M \text{ och } R.$$

Till varje avbildning $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$, konstruerar vi den transponerade avbildningen

$$f^* : \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R).$$

Avbildningen $f^*(\varphi)$ definieras som

$$\varphi \circ f.$$

Vi får det kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi)"'] & & N \arrow[dl, "\varphi"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Man visar lätt att f^* är en grupphomomorfism, och att om Λ är kommutativ, så är f^* även en Λ-homomorfism.

Om $L \xrightarrow{f} M$ och $M \xrightarrow{g} N$ är Λ-homomorfismer så är även $(fg)^* = g^* f^*$.

Betrakta nu den exakta sviten

$$E : 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0.$$

Denna ger upphov till en svit

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(E, R) : 0 \leftarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \leftarrow 0$$

Vi skall visa, att $\mathrm{Hom}_\Lambda(E, R)$ är exakt om Λ = kropp, men att detta ej är sant för allmänna Λ.

Vi påminner om att $\mathrm{Hom}_\Lambda(E, R)$ är exakt då och endast då

a) g^* är injektiv

b) $\mathrm{Im}\, g^* = \mathrm{Ker}\, f^*$

c) f^* är surjektiv.

Låt oss undersöka punkt c).

Vad innebär det att f^* är surjektiv? Vi har att $0 \to L \xrightarrow{f} M$ är exakt, dvs. f är injektiv, och L är isomorf med undermodulen $\mathrm{Im}\, f$ i M. Att f^* är surjektiv betyder att varje $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R)$ kan faktoriseras $\varphi = \psi \circ f$ med $\psi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R)$, dvs. att varje $\varphi : L \to R$ kan "utvidgas" till M.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Om Λ är en kropp ges denna möjlighet av just sats B, och vi har funnit den förebådade omformuleringen av denna:

Sats B $\Longleftrightarrow$ f^* alltid surjektiv för k-moduler.

Proposition ~~3~~ 4. För allmänna Λ-moduler är f^* ej alltid surjektiv.

Bevis: Sätt $\Lambda = Z$, $R = Z$.

Sviten

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow[f]{2} Z \xrightarrow[g]{} Z_2 \longrightarrow 0$$

där f är multiplikation med 2 och g den naturliga projektionen är exakt, men f^* är ej surjektiv,
ty betrakta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Z \arrow[r, "2"] \arrow[d, "id"'] & Z \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Antag att den identiska avbildningen ovan kan utvidgas. (Z till vänster identifieras med undermodulen $2Z$ i Z till höger.)

Det finns då en avbildning $\varphi : Z \longrightarrow Z$ så att

$$n = 2\varphi(n) \quad , \quad n \in Z .$$

Speciellt $1 = 2\varphi(1)$. Motsägelse.

Vi skall nu se att trots allt något av exaktheten i den ursprungliga sviten bevaras då vi applicerar Hom.

Sats 1. Om

$$E : 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

är en exakt svit av Λ-moduler och R en Λ-modul så är sviten

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R)$$

exakt. OBS! VÄNSTER EXAKT!!

<u>Bevis:</u> Vi har att verifiera

1) $\operatorname{Ker} g^* = 0$

2) $\operatorname{Im} g^* \subset \operatorname{Ker} f^*$

3) $\operatorname{Ker} f^* \subset \operatorname{Im} g^*$.

1) $\operatorname{Ker} g^* = 0$.

Tag $\varphi \in \operatorname{Ker} g^*$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g^*(\varphi)"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\ & R & \end{tikzcd}$$

$g^*(\varphi) = \varphi \circ g = 0 \Rightarrow \varphi(g(m)) = 0$, $\forall\, m \in M$.

Eftersom g är surjektiv, är varje n i N av formen $g(m)$, och alltså är $\varphi(n) = 0$, $\forall\, n \in N$, vilket medför $\varphi = 0$.

2) $\operatorname{Im} g^* \subset \operatorname{Ker} f^*$.

Sviten exakt $\Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \Rightarrow gf = 0 \Rightarrow f^* g^* = (gf)^* = 0$.

3) $\operatorname{Ker} f^* \subset \operatorname{Im} g^*$.

Tag $\varphi \in \operatorname{Ker} f^*$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f^*(\varphi) = \varphi f"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & N \arrow[r] \arrow[dl, dashed, "\theta"] & 0 \\ & & R & & \end{tikzcd}$$

$f^*(\varphi) = \varphi f = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} \varphi$.

φ inducerar då en avbildning $\overline{\varphi}$ så att diagrammet

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p"'] & R \\ M/\operatorname{Ker} g \arrow[ur, "\overline{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

där p är den naturliga projektionen, blir kommutativt. Detta följer ur att, eftersom $\varphi(\text{Ker } g) = 0$, φ är konstant på varje bimängd till Ker g, och $\bar{\varphi}$ på ett element i $M/\text{Ker } g$, alltså en bimängd, definieras som det~~ta~~ konstanta värde.

Eftersom g är en surjektion, inducerar den en kanonisk isomorfism λ så att diagrammet

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "p"'] & N \\
M/\text{Ker } g \arrow[ur, "\lambda"'] &
\end{tikzcd}$$

blir kommutativt.

Sätt nu

$$\theta = \bar{\varphi}\,\lambda^{-1} : N \to R .$$

Då är

$$g^*(\theta) = \theta\, g = \bar{\varphi}\,\lambda^{-1} g = \bar{\varphi}\, p = \varphi$$

och alltså $\varphi \in \text{Im } g^*$. V.S.B.

Vi undersöker nu om det finns några moduler R så att

$$E : 0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0 \quad \text{exakt}$$

medför att

$$\text{Hom}_\Lambda(E, R) : 0 \leftarrow \text{Hom}_\Lambda(L, R) \xleftarrow{f^*} \text{Hom}_\Lambda(M, R) \xleftarrow{g^*} \text{Hom}_\Lambda(N, R) \leftarrow 0$$

är exakt för varje exakt svit E av Λ-moduler.

Det gäller enligt sats 1 endast att visa att f^* är surjektiv, dvs. att varje $\varphi \in \text{Hom}_\Lambda(L, R)$ kan faktoriseras

$$\varphi = f^*(\theta) = \theta f \quad \text{för något } \theta \in \text{Hom}_\Lambda(M, R).$$

Vi gör följande

<u>Definition</u>: En Λ-modul R kallas <u>injektiv</u> om varje givet diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \\
& R &
\end{tikzcd}$$

med $0 \to A \to B$ exakt, kan kompletteras med en Λ-homomorfism $B \to R$ så att diagrammet

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl] \\ & R & \end{tikzcd}$$

blir kommutativt.

Denna definition kan skrivas som:

En Λ-modul R är injektiv om, när helst A är en undermodul till B, varje homomorfism $A \to R$ kan utvidgas till en homomorfism $B \to R$.

Sviten $\mathrm{Hom}_\Lambda(E, R)$ är exakt för varje exakt svit E då och endast då R är Λ-injektiv.

Exempel: 1) $\Lambda = k$, kropp.

Som vi tidigare sett, är varje k-modul injektiv (Sats B).

2) $\Lambda = Z$

Injektiva Z moduler är

a) Q

b) $Z_{p.\infty}$ = den multiplikativa gruppen av enhetsrötter av ordningen p^k, där p är ett fixt primtal och k varierande heltal.

(Se kap. 3.)

§ 4. Avvikelse från exakthet. Funktorn $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R)$.

Vi skall nu för allmänna moduler R studera avvikelsen för sviten $\mathrm{Hom}_\Lambda(E, R)$ från att vara exakt. Innan vi gör detta, påpekar vi att motsvarigheten

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, R) \begin{cases} N \to \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \\ f \to f^* \end{cases}$$

(vi skriver hädanefter alternativt $\mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)$ och f^*) är ett exempel på en funktor, eller bättre, kontravariant funktor från Λ-modulerna till de abelska grupperna, dvs. en "funktion" F som till varje Λ-modul M ordnar en grupp $F(M)$ och till varje Λ- homomorfism $M \xrightarrow{f} N$ ordnar en grupp-homomorfism

$$F(N) \xrightarrow{F(f)} F(M) \text{ så att}$$

$$F(fg) = F(g)\,F(f)$$

och $\qquad F\text{ (identitet)} = \text{identitet.}$

Dessutom gäller att

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(f+g, R) = \mathrm{Hom}_\Lambda(f, R) + \mathrm{Hom}_\Lambda(g, R)$$

(Funktorn $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, R)$ är additiv), och

$$E : 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0 \quad \text{exakt}$$

medför att

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(L, R) \xleftarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \xleftarrow{\mathrm{Hom}_\Lambda(g, R)} \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \longleftarrow 0$$

är exakt.

(Funktorn $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, R)$ är <u>vänster exakt.</u>)

Om $\quad 0 \longleftarrow F(L) \xleftarrow{F(f)} F(M) \xleftarrow{F(g)} F(N) \longleftarrow 0$

(resp. $\quad F(L) \xleftarrow{F(f)} F(M) \xleftarrow{F(g)} F(N)$)

är exakt för varje E, så kallas F för en exakt, (resp. halvexakt) funktor.

I kapitel 3 kommer en allmän teori för hur man mäter avvikelsen för halv-exakta additiva funktorer från att vara exakta. Här skall vi endast studera $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, R)$.

Som vi sett är i allmänhet inte $f^* = \mathrm{Hom}_\Lambda(f, R)$ surjektiv.

Sätt $\quad G(E) = \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R)/\mathrm{Im}\, f^*$.

Det är klart att $G(E)$ i någon mening mäter avvikelsen för f^* från att vara surjektiv.

Vi kan nu utvidga den exakta sviten ovan till den exakta sviten

$$0 \longleftarrow G(E) \xleftarrow{p} \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \longleftarrow 0$$

där p är den naturliga projektionen av $\mathrm{Hom}_\Lambda(L, R)$ på kvotrummet $G(E)$.

Det är trivialt att sviten blir exakt.

Vi varierar nu sviten E, men håller N och R fixa.

Betrakta

$$E: \ 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

$$E': \ 0 \longrightarrow L' \xrightarrow{f'} M' \xrightarrow{g'} N \longrightarrow 0$$

<u>Definition.</u> Vi säger att E är större än E', $E > E'$, om det finns en homomorfism m så att diagrammet

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ m \downarrow & & \downarrow id \\ M' & \xrightarrow{g'} & N \end{array}$$

blir kommutativt, dvs. så att $g' m = g$.

Eftersom f och f' är injektiva, följer härav att det finns en homomorfism l så att diagrammet

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & M \\ l \downarrow & & \downarrow m \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' \end{array}$$

blir kommutativt, dvs. $m f = f' l$, och l är entydigt bestämd av m.

Vi får det kommutativa diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow l & & \downarrow m & & \downarrow id & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Använd nu $Hom_\Lambda(\cdot, R)$ på detta.

Vi får då diagrammet

$$\begin{array}{ccccccc} Hom_\Lambda(L, R) & \xleftarrow{f^*} & Hom_\Lambda(M, R) & \xleftarrow{g^*} & Hom_\Lambda(N, R) & \longleftarrow & 0 \\ \uparrow l^* & & \uparrow m^* & & \uparrow id & & \\ Hom_\Lambda(L', R) & \xleftarrow{f'^*} & Hom_\Lambda(M', R) & \xleftarrow{g'^*} & Hom_\Lambda(N, R) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

vilket vi kan utvidga till

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longleftarrow & G(E) & \xleftarrow{p} & Hom_\Lambda(L,R) & \xleftarrow{f^*} & Hom_\Lambda(M,R) & \xleftarrow{g^*} & Hom_\Lambda(N,R) & \longleftarrow 0 \\
 & & & \uparrow 1^* & & \uparrow m^* & & \uparrow id & \\
0 \longleftarrow & G(E') & \xleftarrow[p']{} & Hom_\Lambda(L',R) & \xleftarrow[f'^*]{} & Hom_\Lambda(M',R) & \xleftarrow[g'^*]{} & Hom_\Lambda(N',R) & \longleftarrow 0
\end{array}$$

där raderna är exakta.

Här gäller att om

$\lambda' \in \operatorname{Ker} p'$ så kan vi skriva $\lambda' = f'^*\mu'$, ty $\operatorname{Im} f'^* = \operatorname{Ker} p'$

Alltså

$$p\,1^*\lambda' = p\,1^*f'^*\mu' = p\,f^*m^*\mu' = 0$$

ty $1^*f'^* = f^*m^*$ och $p\,f^* = 0$.

Vi kan alltså definiera en avbildning $u : G(E') \longrightarrow G(E)$, som induceras av 1^* och gör diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
G(E) & \xleftarrow{p} & Hom_\Lambda(L,R) \\
\uparrow u & & \uparrow 1^* \\
G(E') & \xleftarrow[p']{} & Hom_\Lambda(L',R)
\end{array}$$

kommutativt.

Proposition 5. Avbildningen u är oberoende av valet av m.

Bevis: Låt m och m_1 vara homomorfismer $M \longrightarrow M'$ så att

$$g = g'm$$

$$g = g'm_1 .$$

Då är $g'(m-m_1) = 0$, dvs.

$$\operatorname{Im}(m-m_1) \subset \operatorname{Ker} g' = \operatorname{Im} f'.$$

Till varje $x \in M$ finns då ett $y \in L'$ så att

$$(m-m_1)(x) = f'(y)$$

och detta y är entydigt bestämt, eftersom f' är injektiv.

Sätt $\varphi(x) = y$.

Det inses lätt att φ är en Λ-homomorfism $M \to L'$, och

$$f'\varphi = m - m_1 \quad .$$

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "l_1"'] \arrow[d, shift left, "l"] & M \arrow[d, shift right, "m_1"'] \arrow[d, shift left, "m"] \arrow[dl, "\varphi"'] \\
L' \arrow[r, "f'"'] & M'
\end{tikzcd}$$

Ur definitionen av l och l_1 får vi att

$$\varphi f = l - l_1 \, .$$

Av φ induceras en avbildning φ^*, och

$$f^*\varphi^* = l^* - l_1^*$$

$$\begin{tikzcd}
0 & G(E) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R) \arrow[l, "p"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \arrow[l, "f^*"'] \\
0 & G(E') \arrow[l] \arrow[u, "u - u_1"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(L', R) \arrow[l, "p'"] \arrow[u, "l^* - l_1^*"] \arrow[ur, "\varphi^*"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(M', R) \arrow[l, "f'^*"] \arrow[u, "m^* - m_1^*"']
\end{tikzcd}$$

Ur diagrammet fås

$$(u - u_1)p' = p f^* \varphi^* = 0 \quad \text{eftersom} \quad p f^* = 0.$$

Eftersom p' är surjektiv, medför detta att $u - u_1 = 0$, och alltså är u oberoende av valet av m.

Vi betraktar nu exakta sviter E_1, E_2 och E_3 så att

$$E_1 > E_2 > E_3 \quad .$$

Detta ger homomorfismer

$$\begin{tikzcd}
G(E_1) & G(E_2) \arrow[l, "u_{12}"'] & G(E_3) \arrow[l, "u_{23}"'] \arrow[ll, bend left, "u_{13}"]
\end{tikzcd}$$

och man visar lätt att

$$u_{13} = u_{12} u_{23} .$$

Vi skall senare visa att avbildningen

$$G(E) \xleftarrow{u} G(E') \text{ är injektiv.}$$

Låt oss provisoriskt acceptera detta faktum.

Vår avsikt med $G(E)$ var ju att mäta avvikelsen för sviten $\operatorname{Hom}_{\Lambda}(E, R)$ från att vara exakt. Vi vill nu se hur stor $G(E)$ kan bli när vi varierar E men håller N och R fixa. Eftersom avbildningen $G(E) \longleftarrow G(E')$ för $E > E'$ är injektiv, identifieras $G(E')$ med en undergrupp till $G(E)$. För att finna ett maximalt $G(E)$ räcker det då att finna ett maximalt E.

Antag att sviten

$$\tilde{E} : 0 \longrightarrow \tilde{L} \xrightarrow{\tilde{f}} \tilde{M} \xrightarrow{\tilde{g}} N \longrightarrow 0$$

är maximal, dvs, att $\tilde{E} > E$ för varje svit E.

Detta är ekvivalent med att för varje E diagrammet

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & \tilde{L} \arrow[r, "\tilde{f}"] & \tilde{M} \arrow[r, "\tilde{g}"] \arrow[d, dashed, "\tilde{m}"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\ E : & 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"'] & M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

kan utökas med en homomorfism $\tilde{m}$ så att $g\tilde{m} = \tilde{g}$.

Vi ser att detta beror endast av modulen $\tilde{M}$ (och N). Vi skriver om diagrammet med allt oväsentligt borttaget.

$$\begin{tikzcd} & \tilde{M} \arrow[dl, dashed, "\tilde{m}"'] \arrow[d, "\tilde{g}"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \qquad \text{raden exakt .}$$

Vi vill alltså kunna faktorisera g som

$$\tilde{g} = g\tilde{m} .$$

För att finna en klass av moduler där vi kan vara säkra att kunna göra denna faktorisering, gör vi följande

Definition. En Λ-modul P säges vara projektiv om varje diagram

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

med exakt rad kan kompletteras med en homomorfism $P \longrightarrow A$ så att det utvidgade diagrammet

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl] \arrow[d] & \\ A \arrow[r] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

blir kommutativt.

Begreppet projektiv modul är väsentligen dualt till begreppet injektiv modul, som man ser av definitionerna.

Vi visar

Sats 2. Varje Λ-modul är kvot av en projektiv Λ-modul.

Vi stöder oss på två lemmata.

Lemma 1: Varje fri Λ-modul är projektiv.

Bevis: Betrakta

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "p"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Låt $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ vara en bas för F.

Då gäller $p(e_\alpha) = f(v_\alpha)$ för något $v_\alpha \in A$, eftersom f är surjektiv.

Eftersom $\{e_\alpha\}_{\alpha\in I}$ är en bas för F, kan vi definiera en homomorfism $\varphi : F \longrightarrow A$ genom att sätta

$$\varphi(e_\alpha) = v_\alpha \quad , \quad \alpha \in I$$

och utvidga den lineärt.

Då är

$$f(\varphi(e_\alpha)) = f(v_\alpha) = p(e_\alpha) \quad , \forall \quad \alpha \in I.$$

Alltså $f\varphi = p$ och F är projektiv.

Lemma 2. Varje Λ-modul N är en kvot av en fri Λ-modul.

Bevis: Låt $F = \Lambda^{(N)}$ vara den fria Λ-modulen som genereras av mängden av element i N.

$$F = \{ \sum_{a \in N} \lambda_a [a] \quad , \lambda_a = 0 \quad \text{för nästan alla } a \}$$

Definiera $p : F \longrightarrow N$ genom att sätta $p[a] = a$ och utvidga lineärt. Då är p surjektiv och alltså

$$N \xrightarrow{\sim} F/\mathrm{Ker}\, p \, .$$

Sats 2 följer nu omedelbart.

Vi har nu visat att till varje Λ-modul N finns en exakt svit

$$E_P : 0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

där P är projektiv, och vi ser att denna svit är större än varje annan svit E, E_p är alltså maximal.

Om $\tilde{E}$ och $\tilde{E}'$ är två maximala sviter, gäller

$$\tilde{E} > \tilde{E}' > \tilde{E}$$

vilket ger

$$G(\tilde{E}) \longleftarrow G(\tilde{E}') \longleftarrow G(\tilde{E})$$

där kompositionen $G(\tilde{E}) \longleftarrow G(\tilde{E})$ är identiteten, enligt transitiviteten och entydigheten av avbildningen $G(E) \longrightarrow G(E')$.

Alltså är

$$G(\tilde{E}) \xrightarrow{\sim} G(\tilde{E}').$$

Låt N vara en Λ-modul och P den projektiva modul som konstruerats i Lemma 2. Vi sätter $L = \mathrm{Ker}\, p$ och får den exakta sviten

$$E_p : 0 \longrightarrow L \longrightarrow P \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0 .$$

Definition.

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda (N, R) = G(E_p) \, .$$

(Förklaringen till denna beteckning ges senare.)

Om $\tilde{E}$ är en annan maximal svit, har vi enligt ovan en kanonisk isomorfism

$$G(\tilde{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R).$$

Vi har ~~också~~ alltså visat att om

$$E: 0 \longrightarrow L \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0 \quad \text{är exakt},$$

och P projektiv så är

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \longleftarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R) \longleftarrow 0$$

också exakt.

Detta partiella resultat för sviten E med en projektiv term i mitten är tillräckligt för att beräkna Ext^1_Λ i vissa fall.

<u>Exempel 1.</u> a) Om Λ-modulen N är projektiv så är $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R) = 0$ för varje R.

b) Om Λ-modulen R är injektiv så är $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R) = 0$ för varje N.

<u>Bevis:</u> <u>N projektiv.</u>

Betrakta den exakta sviten

$$E: 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow N \xrightarrow{\mathrm{id}} N \longrightarrow 0 .$$

Den är maximal eftersom N är projektiv. Men $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R) = G(E)$ är då uppenbarligen 0.

b) <u>R injektiv.</u>

Om R är injektiv, vet vi enligt ovan, att för varje E, som är exakt, $\mathrm{Hom}_\Lambda(E, R)$ är exakt. Då måste $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R)$ vara noll.

<u>Anm.:</u> Omvändningen till a) och b) gäller också.

<u>Exempel 2.</u> $\Lambda = Z$.

Låt oss beräkna $\mathrm{Ext}^1_Z(Z_n, B)$.

Betrakta den exakta sviten

$$0 \longrightarrow Z \xrightarrow{n} Z \longrightarrow Z_n \longrightarrow 0 .$$

Z är en fri Z-modul, alltså projektiv.

Alltså får vi en exakt svit

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ext}_Z^1(Z_n, B) \longleftarrow \mathrm{Hom}_Z(Z, B) \xleftarrow{(.n)^*} \mathrm{Hom}_Z(Z, B) \xleftarrow{\cancel{(.n)}^*} \mathrm{Hom}_Z(Z_n, B) \longleftarrow 0.$$

Men $(.n)^* = .n$ och

$$\mathrm{Hom}_Z(Z, B) \xrightarrow{\sim} B.$$

Alltså är även

$$0 \longleftarrow \mathrm{Ext}_Z^1(Z_n, B) \xleftarrow{p} B \xleftarrow{.n} B \longleftarrow \mathrm{Hom}_Z(Z_n, B) \longleftarrow 0$$

en exakt svit.

Härav följer

$$\mathrm{Ext}_Z^1(Z_n, B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}\, p \xrightarrow{\sim} B/\mathrm{Ker}\, p = B/\mathrm{Im}(n) = B/n\, B,$$

alltså $\quad \mathrm{Ext}_Z^1(Z_n, B) = B/nB$ och

speciellt $\quad \mathrm{Ext}_Z^1(Z_n, Z_m) = Z_{(m, n)}$ där $(m, n) = $ sgd till m och n.

Vi vill nu beräkna $\mathrm{Ext}_Z^1(A, B)$ där A är ändligt genererad.

Först en definition.

Låt $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ vara en familj av Λ-moduler. Produktmängden $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$

kan förses med en Λ-modulstruktur genom definition av addition

$$\{m_\alpha\}_{\alpha\in I} + \{m'_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{m_\alpha + m'_\alpha\}_{\alpha\in I}$$

och multiplikation med skalär

$$\lambda\{m_\alpha\}_{\alpha\in I} = \{\lambda m_\alpha\}_{\alpha\in I}.$$

Mängden av familjer $\{m_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ sådana att $m_\alpha = 0$ för nästan

alla $\alpha \in I$ är en undermodul och betecknas med $\coprod_{\alpha\in I} M_\alpha$.

Definition. $\prod_{\alpha\in I} M_\alpha$ = direkta produkten av familjen $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$

$\coprod_{\alpha\in I} M_\alpha$ = direkta summan av familjen $\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Den naturliga injektionen

$$\coprod_{\alpha \in I} M_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} M_\alpha$$

är givetvis en isomorfism, om I är ändlig. Låt oss hädanefter förutsätta detta.

Det finns avbildningar

$$M_\beta \xrightarrow{q_\beta} \coprod_{\alpha \in I} M_\alpha \xrightarrow{p_\gamma} M_\gamma$$

så att $\quad p_\gamma q_\beta = 0, \ \gamma \neq \beta \ , \quad p_\gamma q_\gamma = \mathrm{id}, \quad \Sigma \ q_\alpha p_\alpha = \mathrm{id}.$

Omvänt implicerar existensen av sådana avbildningar $\{q_\beta, p_\gamma\}$ mellan $\{M_\alpha\}$ och en modul M, att M är isomorf med $\coprod M_\alpha$, och vi säger, att $\{q_\beta, p_\gamma\}$ är en representation av M, som direkt summa av M_α.

Lemma 3. Om T är en additiv, kontravariant funktor, och $\{q_\beta, p_\gamma\}$ ger en representation av M, som direkt summa av M_α, så ger $\{T(p_\beta), T(q_\gamma)\}$ en representation av $T(M)$, som en direkt summa av $T(M_\alpha)$.

Bevis:

$$T(q_\gamma)T(p_\beta) = T(p_\beta q_\gamma) = T(0) = 0 \quad \text{om} \quad \beta \neq \gamma \, ,$$

$$T(q_\gamma p_\gamma) = T(p_\gamma q_\gamma) = T(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \ ,$$

$$\Sigma T(p_\alpha) T(q_\alpha) = \Sigma \, T(q_\alpha p_\alpha) = T(\Sigma q_\alpha p_\alpha) = T(\mathrm{id}) = \mathrm{id} \, .$$

V.S.B.

Enligt en struktursats för ändligt genererade abelska grupper är varje sådan grupp A av formen

$$A = \coprod_{i=1}^{\varsigma} Z \oplus \coprod_{j=1}^{k} Z_{e_j}$$

där $\quad e_1 | e_2 | e_3 \ldots | e_k \quad$ (delar $= |$).

Om vi alltså kan definiera någon lämplig transformation $T(f)$ av homomorfismer $A \xrightarrow{f} A'$, så att $\{A \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B), T\}$ blir en kontravariant additiv funktor, så får vi speciellt

$$\mathrm{Ext}^1_Z(A, B) = \coprod_i \mathrm{Ext}^1_Z(Z, B) \oplus \coprod_j \mathrm{Ext}^1(Z_{e_j}, B) = \coprod_j B/e_j B = \coprod_j B_{e_j} \, .$$

Sätt $T(N) = \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(N, R)$.

Vi skall till $N \xrightarrow{f} N'$

ordna $\quad T(N') \xrightarrow{T(f)} T(N)$

så att $\quad T(f f') = T(f')T(f)$

$\quad T(id) = id$

$\quad T(f+f') = T(f) + T(f')$.

Betrakta diagrammet

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\varphi"] & P \arrow[r, "\psi"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\varphi'"] & P' \arrow[r, "\psi'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

där P, P' är projektiva och raderna exakta. (Vi väljer P, P' som i Lemma 2).

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "m"'] \arrow[d, "f\psi"] & \\ P' \arrow[r, "\psi'"] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \quad \text{exakt rad .}$$

Vi kan då finna $m : P \longrightarrow P'$ så att

$$m\psi' = f\psi$$

och därmed även $l : L \longrightarrow L'$, så att

$$\varphi' l = m\varphi \;.$$

Vi får det kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "l"] & P \arrow[r] \arrow[d, "m"] & N \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & P' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Vi använder $\mathrm{Hom}(\cdot, R)$ på detta och utvidgar som tidigare. Eftersom P och P' är projektiva, får vi ett kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd} 0 & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(N, R) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(L, R) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(P, R) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(N, R) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\ 0 & \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(N', R) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(L', R) \arrow[l] \arrow[u, "l^*"] & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(P', R) \arrow[l] \arrow[u, "m^*"] & \mathrm{Hom}_{\Lambda}(N', R) \arrow[l] \arrow[u, "f^*"] & 0 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

med exakta rader.

På samma sätt som tidigare finner vi att vi får en entydigt bestämd avbildning

$$T(f) : \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(N', R) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(N, R).$$

Att

$$T(f\,f') = T(f')T(f) \quad \text{och}$$
$$T(id) = id$$
$$T(f+f') = T(f) + T(f')$$

verifieras snabbt, och formeln för $\mathrm{Ext}^1_Z(A, B)$ (A ändligt genererad) är således riktig.

§ 5. Bevis för att $G(E') \longrightarrow G(E)$ är injektiv.

Sats 3. Om $E' < E$, är den kanoniska avbildningen

$$G(E') \longrightarrow G(E)$$

injektiv.

Bevis: Det räcker att visa satsen i fallet att $E = E_{max}$ är maximal.

Då får vi

$$E_{max} > E' > E''$$

$$\begin{tikzcd} G(E_{max}) & G(E') \arrow[l, "u'"'] & G(E'') \arrow[l, "u"'] \arrow[ll, bend left, "u''"] \end{tikzcd}$$

där u och u'' är injektiva och $u'u = u''$. Då blir även u injektiv, ty $u(x) = 0 \Rightarrow u'(u(x)) = u''(x) = 0$, $\Rightarrow x = 0$ ty u'' injektiv.

Låt E vara $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, och skriv M, som en kvot av en projektiv modul P. Vi får en exakt svit

$$0 \longrightarrow M'' \xrightarrow{\mu} P \xrightarrow{\theta} M \longrightarrow 0 \quad .$$

Definiera en surjektiv avbildning $P \xrightarrow{g_P} N$ genom $g_P = g\,\theta$. Vi får då ett kommutativt diagram med exakta rader och kolonner

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & M'' \arrow[d, "\mu"] & & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f_P"] \arrow[d, squiggly, "\varphi"] & P \arrow[r, "g_P"] \arrow[d, "\theta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

φ definieras entydigt av villkoret att göra diagrammet kommutativt, och är surjektiv. Ty, tag $l \in L$. Klart är att $f(l) = \theta(p)$ (θ surjektiv). Men $g_P(p) = g\,\theta\,(p) = g\,f(l) = 0$. Alltså $p = f_P(l')$. Härav $f\varphi\,(l') = \theta\,f_P(l') = \theta(p) = f(l)$, så att $l = \varphi\,(l')$ ty f är injektiv.

Vi kan nu komplettera till ett kommutativt, exakt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L'' \arrow[r, squiggly, "\psi"] \arrow[d, "\lambda"] & M'' \arrow[d, "\mu"] & & \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "f_P"] \arrow[d, "\varphi"] & P \arrow[r, "g_P"] \arrow[d, "\theta"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

På samma sätt, som förut definierar diagrammet ett ψ

$$\psi : L'' \longrightarrow M'' ,$$

som dessutom är en isomorfism, ty

1) ψ är injektiv.

$$\psi(l'') = 0 \Rightarrow \mu\,\psi(l'') = f_p\,\lambda\,(l'') = 0$$

$$\Rightarrow \lambda(l'') = 0 \quad \text{ty } f_p \text{ injektiv}$$

$$\Rightarrow l'' = 0 \quad \text{ty } \lambda \text{ injektiv.}$$

2) ψ är surjektiv.

Tag $m'' \in M''$.

$$\theta\,\mu = 0 \Rightarrow g_p\,\mu(m'') = g\,\theta\,\mu\,(m'') = 0 \Rightarrow$$

$$\mu(m'') \in \operatorname{Ker} g_p = \operatorname{Im} f_p \Rightarrow$$

$$\mu(m'') = f_p(l') \text{ för något } l' \in L'.$$

Men $\quad f\,\varphi\,(l') = \theta\,f_p(l') = \theta\,\mu(m'') = 0$

$$\Rightarrow \varphi\,(l') = 0 \text{ ty } f \text{ injektiv.}$$

Alltså $\quad l \in \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\lambda$

$$\Rightarrow l' = \lambda\,(l'') \text{ för något } l'' \in L''$$

så att $\quad \mu\,\psi\,(l'') = f_p\,\lambda\,(l'') = f_p(l') = \mu(m'')$

och $\quad \psi\,(l'') = m''$ eftersom μ injektiv.

Alltså är ψ surjektiv.

Vi använder nu funktorn Hom $(\,\cdot\,, R)$ på diagrammet och utvidgar som vanligt till det kommutativa diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & & \operatorname{Hom}_\Lambda(L'', R) & \operatorname{Hom}_\Lambda(M'', R) \arrow[l, "\psi^*"'] & & \\
0 & \operatorname{Ext}^1_\Lambda(N, R) \arrow[l] & \operatorname{Hom}_\Lambda(L', R) \arrow[l, "q"'] \arrow[u, "\lambda^*"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(P, R) \arrow[l, "g_p^*"'] \arrow[u, "\mu^*"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(N, R) \arrow[l, "f_p^*"'] & 0 \arrow[l] \\
0 & G(E) \arrow[l] \arrow[u, "u"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(L, R) \arrow[l, "p"'] \arrow[u, "\varphi^*"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(M, R) \arrow[l, "f^*"] \arrow[u, "\theta^*"'] & \operatorname{Hom}_\Lambda(N, R) \arrow[l, "g^*"] \arrow[u, "id"'] & 0 \arrow[l] \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

med exakta rader och kolonner.

Vi skall visa att u är injektiv.

Antag $u(\alpha) = 0$. Eftersom p är surjektiv, är $\alpha = p(l)$ för $l \in \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R)$.

Då är $q\varphi^*(l) = u\,p(l) = u(\alpha) = 0$, och alltså $\varphi^*(l) \in \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Im}\, g_p^*$, så att

$\varphi^*(l) = g_p^*(m')$ för något $m' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, R)$.

Men $\psi^*\mu^*(m') = \lambda^* g_p^*(m') = \lambda^*\varphi^*(l) = 0$,

ty $\lambda^*\varphi^* = 0$.

Då är också

$$\mu^*(m') = 0,$$

eftersom ψ^* är en isomorfism, och alltså

$$m' = \theta^*(m), \quad m \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R).$$

Vi får

$$\varphi^* f^*(m^*) = g_p^*\,\theta^*(m) = g_p^*(m') = \varphi^*(l)$$

och alltså $f^*(m) = l$, eftersom φ^* är injektiv. Härav följer det önskade resultatet.

$$\alpha = p(l) = p\,f^*(m) = 0$$

eftersom $p\,f^* = 0$.

Vi erhåller följande

Korollarium. Sviten

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, R) \xleftarrow{up} \mathrm{Hom}_\Lambda(L, R) \xleftarrow{f^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(M, R) \xleftarrow{g^*} \mathrm{Hom}_\Lambda(N, R) \longleftarrow 0$$

är exakt.

Bevis: Eftersom u är injektiv, är

$$\mathrm{Ker}(up) = \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}\, f^*.$$

Resten visste vi redan.

En undersökning av hur denna svit kan fortsättas kommer att ges i Kap. 3, där vi f.ö. kommer att behandla en allmän halvexakt funktor.

—— o —————— o ——

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

KAPITEL 2. NÅGRA TOPOLOGISKA TILLÄMPNINGAR. TENSORPRODUKT.

(16 september 1961)

§1. Allmänt om (ko-)homologiteorier.

Låt D vara en öppen sammanhängande delmängd av komplexa talplanet, och f en analytisk funktion i D. Låt $z_o, z_1 \in D$, och låt γ vara en reguljär kurva i D, som förbinder z_o med z_1. Vi ställer oss följande problem:

Hur beror integralen $\int_\gamma f(z)dz$ på integrationsvägen i D, då z_o och z_1 hålles fixa?

Man leds omedelbart till att undersöka integraler över slutna kurvor Γ. Om Γ är en orienterad rand till en kompakt mängd i D (se H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques ..., Déf. sid. 65) så är $\int_\Gamma f(z)dz = 0$ enligt Cauchys integralsats. Det är således intressant, att undersöka avvikelsen för slutna kurvor att vara rand till något område. Detta sista problem behandlades först av Riemann för det allmännare fallet, att D är en delmängd av en Riemannsk yta, men efterlämnade manuskriptfragment visar, att han hade grunddragen klara till en ännu allmännare teori.

Inspirerad av Riemann och Betti införde Poincaré 1895 följande viktiga begrepp:

En familj orienterade slutna kurvor $\{\Gamma_i\}_{i=1}^n$ i D, så beskaffade att de tillsammans bildar orienterad rand till ett område i D, sägesstå i en homologirelation till varandra, och vi skriver

$$\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n \sim 0.$$

Allmännare definieras $-\Gamma = \Gamma$ med omvänd orientering. Om $\Gamma_1 + (-\Gamma_2) \sim 0$ (vi säger då att Γ_1 och Γ_2 är homologa) så är

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz \ .$$

Poincaré studerade generaliseringen av detta till allmännare topologiska rum X. Man får då även betrakta homologirelationer mellan k-dimensionella ytor utan rand.

Betrakta allmännare alla formella homologirelationer av typen

$$\Sigma n_i \Gamma_i \sim 0 \quad \text{där } \Gamma_i \text{ är k-dimensionella, och } n_i \in Z.$$

De kan adderas, subtraheras, multipliceras med heltal.

[Det är klart, att här fordras många preciseringar. Vad menas med en k-dimensionell yta i ett allmänt topologiskt rum? Får Γ_i skära varandra? Hur skiljer man mellan $2\Gamma_i$ och Γ_i? (Geometriskt är de lika.) Vad är sambandet mellan $-(\Gamma)$ och $(-\Gamma)$? En möjlig precisering ges i § 2, där vi betraktar den s.k. singulära teorien.]

Om man dessutom bestämmer, att

$$(*) \quad n(\Sigma n_i \Gamma_i) \sim 0 \text{ skall vara ekvivalent med } \Sigma n_i \Gamma_i \sim 0$$

så kan man för enkla rum finna en minimal svit av homologirelationer för k-dimensionella ytor ur vilken alla andra kan härledas med hjälp av ovannämnda operationer. Antalet relationer i en minimal svit är en topologisk invariant, och kallas för k-te Bettitalet för X, och betecknas med B_k. Poincaré visade, att för t.ex. en n-dimensionell kompakt differentierbar orienterbar mångfald, så är $B_k = B_{n-k}$ (Poincarés dualitetssats). Om man ger avkall på räkneregeln (*), så får man fler invarianter, de s.k. torsionstalen och för mångfalder har man en dualitetssats även för dem.

Mot mitten av 1920-talet övergick man från dessa numeriska invarianter till mer algebraiska sådana, homologi och kohomologigrupper, som i viss mening är duala till varandra. Den k-te homologigruppen av X kan mycket grovt talat definieras som kvotgruppen av den grupp, som genereras av k-dimensionella slutna ytor, med undergruppen av ränder till (k+1)-dimensionella ytor.

Med åren har utvecklats en mängd mer eller mindre allmänna (ko-)homologiteorier. De väsentligaste är

1) Singulära teorien, som har stor användning i homotopiteori.

2) Grothendiecks teori, som kan betraktas som perfektionen av Čechs äldre teori, och som har väsentlig användning i funktionsteori och algebraisk geometri.

Dessa två teorier är extremala; alla andra teorier kan betraktas såsom liggande mellan dessa (i en mening som ej preciseras här). Dessutom sammanfaller de för rum av enkel lokal och global struktur, exempelvis triangulerbara kompakta rum, vilka t. ex. innefattar alla kompakta differentierbara mångfalder.

I Kapitel 4 och 5 kommer Grothendiecks teori att beröras.

§ 2. Singulär homologiteori.

Låt oss först konstruera "byggstenar" med vars hjälp k-dimensionella ytor skall byggas upp.

Definition.

$$\Delta_k = \left\{x;\ x \in R^{k+1},\ \sum_{i=0}^{k} x_i = 1,\ x_i \geq 0 \text{ för } 0 \leq i \leq k\right\}$$

kallas för standardsimplexet av dimensionen k. Klart är att Δ_k är en kompakt delmängd av R^{k+1}.

Vi inför avbildningarna $e_k^i : \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ genom $y = e_k^i(x)$, där

$$y_j = \begin{cases} x_j & \text{om } j < i \\ 0 & j = i \\ x_{j-1} & j > i . \end{cases}$$

Genom e_k^i identifieras Δ_{k-1} med en sida i Δ_k.

Exempel. Δ_0 = punkt

Δ_1 = segment

Δ_2 = triangel

Δ_3 = tetraeder.

Låt nu X vara ett godtyckligt topologiskt rum. En k-dimensionell yta i X, kommer i vår teori att i någon mening sammansättas av kontinuerliga bilder av Δ_k, alltså $s_k(\Delta_k)$, där $s_k : \Delta_k \to X$ är en kontinuerlig avbildning. För att kunna definiera begreppet rand på ett precist sätt, kommer vi emellertid ej att betrakta $s_k(\Delta_k)$ som "byggstenar", utan vi inför

<u>Definition:</u> Ett <u>singulärt k-simplex</u> s_k i X är en kontinuerlig avbildning

$$s_k : \Delta_k \to X.$$

Den i-te sidan $s_k^{(i)}$ till s_k är $(k-1)$-simplexet

$$s_k^{(i)} = s_k e_k^i : \Delta_{k-1} \to X .$$

<u>Lemma 1.</u> $(s^{(i)})^{(j)} = (s^j)^{(i-1)}$ om $0 \leq j < i \leq k$. Beviset är trivialt.

Vi vill nu kunna bilda lineärkombinationer av singulära simplex.

<u>Definition:</u> Den fria abelska gruppen med de singulära k-simplexen i X som bas betecknas med $C_k(X)$ och kallas <u>den k-te singulära kedjegruppen av X</u> (med koefficienter i Z). Elementen i $C_k(X)$ kallas <u>singulära k-kedjor</u>. Vi sätter $C_k(X) = 0$ om $k < 0$.

En k-kedja c är alltså en bildning av formen

$$c = \Sigma\, n_s \cdot s_k \qquad , \quad s_k \text{ singulära k-simplex },$$
$$n_s = 0 \text{ för nästan alla } s ,$$

och kan intuitivt betraktas som en k-dimensionell yta (med rand). Observera dock att c är en blandat algebraisk och geometrisk bildning. Genom att betrakta sådana c undviker man de svårigheter, som nämnts i § 1.

Vi vill nu bilda rand (i någon mening) av $c \in C_k(X)$.

<u>Definition:</u> <u>Randhomomorfismen</u> eller <u>differentialen</u> $d_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ definieras genom

$$d_k s_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i s_k^{(i)} \qquad \text{om } k > 0$$

$$= 0 \qquad \text{om } k \leq 0$$

på baselementen i $C_k(X)$ och utvidgas genom linearitet.

Sats 1. $d_{k-1}d_k = 0$.

Bevis: Om $k \leq 1$, är $d_{k-1} = 0$ enligt definition. Antag att $k \geq 0$. Det räcker att verifiera $d_{k-1}d_k s_k$ för varje baselement s_k av $C_k(X)$

$$d_{k-1}d_k s_k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i d_{k-1} s^{(i)} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^i (-1)^j (s^{(i)})^{(j)} =$$

$$\sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} (s^{(i)})^{(j)} + \sum_{0 \leq i \leq j < k} (-1)^{i+j} (s^{(i)})^{j}.$$

Enligt Lemma 1 är den första summan

$$\sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} (s^{(j)})^{(i-1)}.$$

Ersätt $i-1$ med j och j med i, så får vi

$$\sum_{0 \leq i \leq j < k} (-1)^{i+j+1} (s^{(i)})^{(j)},$$

och summorna tar ut varandra. V.S.B.

Vi har alltså erhållit grupper $(C_k(X))_{k \in Z}$ och homomorfismer $d_k : C_k(X) \to C_{k-1}(X)$ så att $d_{k-1}d_k = 0$. Vi skriver

$$C_*(X) = (C_k(X), d_k)_{k \in Z}.$$

$C_*(X)$ kallas det singulära kedjekomplexet för X (med koefficienter i Z).

Det som svarar mot k-dimensionella ytor utan rand är tydligen

$\mathrm{Ker}(C_k(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(X))$, som skrives $Z_k(X)$ och kallas för de k-dimensionella cyklerna. Gruppen $\mathrm{Im}(C_{k+1}(X) \xrightarrow{d_{k+1}} C_k(X))$ är just de k-cykler, som är rand till något $k+1$ dimensionellt och skrives $B_k(X)$.

Enligt Sats 1 är $B_k(X)$ en undergrupp till $Z_k(X)$. Kvotgruppen $H_k(X) = Z_k(X)/B_k(X)$ kallas för k:te (singulära) homologigruppen av X.

Det är lätt att inse (och visas och preciseras f. ö. nedan) att $C_k(X)$ är en topologisk invariant. Alltså gäller detta även $H_k(X)$. Men $C_k(X)$ är oerhört stora och svårhanterliga grupper. $H_k(X)$ är däremot av ändlig typ för enkla X. Enligt struktursatsen för abelska grupper (Kap. 1) är då

$$H_k(X) = \underbrace{Z + \ldots + Z}_{B_k \text{ stycken}} + Z_{e_1} + Z_{e_2} + \ldots + Z_{e_l}$$

där $e_1 | e_2 | \ldots | e_l$.

B_k är k:te Betti-talet för X och e_i kallas för torsionstalen.

Låt nu Y vara ett annat topologiskt rum, och betrakta en kontinuerlig avbildning $f : X \to Y$. Vad inducerar denna avbildning för homologigrupperna?

För varje singulärt k-simplex s_k i X kan vi definiera ett singulärt k-simplex i Y genom

$$f \circ s_k : \Delta_k \longrightarrow Y .$$

Vi kallar detta för $C_k(f)(s_k)$.

Denna avbildning utvidgar vi till en homomorfism

$$C_k(f) : C_k(X) \longrightarrow C_k(Y)$$

och vi skriver

$$C_*(f) = (C_k(f))_{k \in Z} .$$

Det är trivialt att visa

1) $C_k(f\, g) = C_k(f)\, C_k(g) : C_k(X) \longrightarrow C(W)$

2) C_k (identitet) = identitet,

för varje $k \in Z$, om g är en kontinuerlig avbildning $Y \longrightarrow W$.

Dessutom gäller

Sats 2. $C_k(f)d_k^x = d_k^y C_k(f)$ ..

om d_k^x och d_k^y är randhomomorfismer respektive singulära komplex.

Bevis: s_k singulärt k-simplex i X

$$C_k(f)d_k^x(s_k) = C_k(f)(\Sigma(-1)^i s_k e_k^i) =$$

$$= \Sigma(-1)^i C_k(f)[s_k e_k^i] = \Sigma(-1)^i f s_k e_k^i =$$

$$= \Sigma(-1)^i (C_k(f) s_k) e_k^i = d_k^y C_k(f) s_k .$$

Vi kan uttrycka satsen på följande sätt:

Diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots & \longleftarrow & C_{n-1}(x) & \xleftarrow{d_n^x} & C_n(X) & \xleftarrow{d_{n+1}^x} & C_{n+1}(X) & \longleftarrow & \ldots \\
 & & \downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f)} & & \downarrow{\scriptstyle C_n(f)} & & \downarrow{\scriptstyle C_{n+1}(f)} & & \\
\ldots & \longleftarrow & C_{n-1}(Y) & \xleftarrow{d_n^y} & C_n(Y) & \xleftarrow{d_{n+1}^y} & C_{n+1}(Y) & \longleftarrow & \ldots
\end{array}$$

är kommutativt.

Av 1), 2) och Sats 2 följer:

Sats 3. Det singulära kedjekomplexet är en topologisk invariant. Närmare bestämt, om $f : X \to Y$ är en homeomorfism och $g : Y \to X$ den inversa homeomorfismen, är $C_*(f) : C_*(X) \to C_*(Y)$ en familj homomorfismer, som kommuterar med respektive randoperationer (en sådan familj kallas en homomorfism för komplex), och $C_*(g)$ är en homomorfism för komplex $C_*(Y) \to C_*(X)$ så att $C_*(f)C_*(g) = id_{C_*(Y)}$, $C_*(g)C_*(f) = id_{C_*(X)}$.

§ 3. Allmänna algebraiska kedjekomplex.

Operationen, att till ett kedjekomplex $C_*(X)$ ordna $H_*(X)$ är rent algebraisk. Vi generaliserar detta.

Definition: En svit $C_* = (C_k, d_k)_{k\in Z}$ av Λ-moduler C_k och Λ-homomorfismer $d_k : C_k \to C_{k-1}$ sådan att

$$d_{k-1} d_k = 0 \quad \text{för varje } k$$

kallas ett kedjekomplex (över Λ).

Exempel: Sätt $C_k = C_k(X)$

$$d_k = d_k^*$$

Då blir $C_*(X)$ ett komplex (över Z).

Vi kallar allmänt elementen i C_k k-kedjor.

Låt C_* vara ett komplex.

Då gäller att

$$\operatorname{Im} d_k \subset \operatorname{Ker} d_{k-1} \subset C_k .$$

I regel är $\operatorname{Im} d_k \neq \operatorname{Ker} d_{k-1}$, dvs. sviten

$$\xleftarrow{d_{k-2}} C_{k-2} \xleftarrow{d_{k-1}} C_{k-1} \xleftarrow{d_k} C_k \xleftarrow{d_{k+1}} C_{k+1} \xleftarrow{d_{k+2}} \cdots$$

är ej exakt.

Det är då naturligt att liksom i det konkreta fallet $C_*(X)$, som ett mått på svitens avvikelse från exakthet, bilda $\operatorname{Ker} d_k / \operatorname{Im} d_{k+1}$. Man bibehåller även den geometriska terminologien.

Alltså:

$Z_k(C_*) =$	$\operatorname{Ker} d_k$	k-te cykelgruppen
$B_k(C_*) =$	$\operatorname{Im} d_{k+1}$	k-te randgruppen
$H_k(C_*) =$	$Z_k(C_*)/B_k(C_*)$	k-te homologigruppen för komplexet C_*.

§ 4. Abstrakta kokedjekomplex och singulär kohomologiteori.

Vi använder nu funktorn $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, R)$ på komplexet C_*. Vi skriver

$$C^k(R) = \mathrm{Hom}_\Lambda(C_k, R)$$

och $$d^k = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_{k+1}, R)\,.$$

Då får vi sviten

$$\longrightarrow C^{k-1}(R) \xrightarrow{d^{k-1}} C^k(R) \xrightarrow{d^k} C^{k+1}(R) \xrightarrow{d^{k+1}}$$

med $d^k d^{k-1} = 0$ för varje k.

En sådan svit kallas också ett <u>komplex</u>, mer precist ett kokedjekomplex.

Vi bildar analogt med tidigare

$Z^k(C^*) = \mathrm{Ker}\, d^k$ k-te kocykelgruppen.

$B^k(C^*) = \mathrm{Im}\, d^{k-1}$ k-te korandgruppen.

$H^k(C^*) = Z^k/B^k$ k-te kohomologigruppen.

<u>Speciellt:</u> $C_* = C_*(X)$, $\Lambda = Z$

$C^k(X, R) = \mathrm{Hom}_Z(C_k(X), R)$ k-te <u>singulära kokedjegruppen</u> av X med koefficienter i R.

Vi skriver

$C^*(X, R) = \mathrm{Hom}_Z(C_*(X), R)$. Detta komplex är uppenbarligen en topologisk invariant.

Alltså gäller detta även $H^k(X, R) = H^k(C^*(X, R))$ och denna grupp kallas för den <u>k:te singulära kohomologigruppen av X med koefficienter i R.</u>

§ 5. Ett topologiskt-algebraiskt problem.

Vi skall i Kap. 3 närmare studera algebraiska komplex och deras (ko-) - homologigrupper. Här skall vi betrakta ett topologiskt rum X, och $H_*(X)$, $H^*(X, R)$. Det är lätt att se, att $H^*(X, Z_p)$ är ett vektorrum över

Z_p och dessa grupper är oftast lättåtkomligare än $H_*(X)$. Men det är klart, att $H^*(X, R)$ och $H_*(X)$ ej kan vara oberoende, för om funktorn $\mathrm{Hom}_Z(\cdot, R)$ är exakt, dvs. R injektiv, så är, som man lätt inser

$$H^k(X, R) = \mathrm{Hom}_Z(H_k(X), R).$$

Vi vill nu generalisera denna relation, och ställer oss följande

<u>Problem:</u> Vad är sambandet mellan $H^*(X, R)$ och $H_*(X)$?

Studiet av problemet ovan motiveras även av följande moderna formulering av <u>Poincaré's dualitetssats</u>.

Låt X vara en kompakt orienterbar differentierbar mångfald.

Då gäller

$$\dim X = n \Rightarrow H_k(X) \cong H^{n-k}(X, Z).$$

Låt oss nu lösa problemet ovan. Sviten

$$E(k) : 0 \longrightarrow B_k(X) \longrightarrow Z_k(X) \longrightarrow H_k(X) \longrightarrow 0$$

är definitionsmässigt exakt.

Betrakta $C_k(X) \xrightarrow{d_k} C_{k-1}(X)$.

Bilden av d_k är just $B_{k-1}(X)$, kärnan av d_k är $Z_k(X)$.

Alltså får vi en exakt svit

$$E'(k) : 0 \longrightarrow Z_k(X) \longrightarrow C_k(X) \longrightarrow B_{k-1}(X) \longrightarrow 0 .$$

Vi betraktar nu dessa sviter även för $k+1$ och $k-1$, och sätter ihop dem till följande kommutativa diagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & & & & \\
 & Z_{k+1}(X) \arrow[d] & & & & \\
 & C_{k+1}(X) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "d_{k+1}"] & 0 \arrow[d] & & & \\
0 \arrow[r] & B_k(X) \arrow[r] \arrow[d] & Z_k(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_k(X) \arrow[r] & 0 & \\
 & 0 & C_k(X) \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "d_k"] & 0 \arrow[d] & & \\
 & 0 \arrow[r] & B_{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & Z_{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & H_{k-1}(X) \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & C_{k-1}(X) \arrow[d] & & \\
 & & & B_{k-2}(X) \arrow[d] & & \\
 & & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

med exakta rader och kolonner.

Applicera nu funktorn $\mathrm{Hom}_Z(\cdot, R)$ på diagrammet.

Hur transformeras sviterna E och E'?

Kedjegruppen $C_k(X)$ är fri enligt konstruktion. Men även $Z_k(X)$ och $B_k(X)$ är fria. Detta följer ur

<u>Sats 4.</u> Varje undergrupp till en fri abelsk grupp är fri.

För beviset, se t.ex. Bourbaki, Algèbre, ch. VII, § 3, Th 1.

Alltså har E och E' en projektiv term i mitten, så att vi kan tillämpa teorien i Kap. 1. Vi får

$$G(E) = \mathrm{Ext}_Z^1 (H_k(X), R) \text{ och}$$

$$G(E') = \mathrm{Ext}_Z^1 (B_{k-1}(X), R),$$

och eftersom $B_{k-1}(X)$ är projektiv, är

$$\mathrm{Ext}_Z^1 (B_{k-1}(X), R) = 0.$$

Vi får alltså de exakta sviterna

$$0 \leftarrow \mathrm{Ext}^1_Z(H_k(X), R) \leftarrow \mathrm{Hom}_Z(B_k(X), R) \leftarrow \mathrm{Hom}_Z(Z_k(X), R) \leftarrow \mathrm{Hom}_Z(H_k(X), R) \leftarrow 0$$

$$0 \leftarrow \mathrm{Hom}_Z(Z_k(X), R) \leftarrow \mathrm{Hom}_Z(C_k(X), R) \leftarrow \mathrm{Hom}_Z(B_{k-1}(X), R) \leftarrow 0.$$

och vårt diagram övergår i

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hom}_Z(C_{k+1}(X), R) & 0 & & \\
 & \mathrm{Hom}_Z(B_k(X), R) \arrow[u] & \mathrm{Hom}_Z(Z_k(X), R) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_Z(H_k(X), R) \arrow[l] & 0 \arrow[l] \\
 & 0 \arrow[u] & \mathrm{Hom}_Z(C_k(X), R) \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "d^k"] & 0 & \\
0 & \mathrm{Ext}^1_Z(H_{k-1}(X), R) \arrow[l] & \mathrm{Hom}_Z(B_{k-1}(X), R) \arrow[l] \arrow[u] & \mathrm{Hom}_Z(Z_{k-1}(X), R) \arrow[l] \arrow[u] & \\
 & & 0 \arrow[u] & \mathrm{Hom}_Z(C_{k-1}(X), R) \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "d^{k-1}"] &
\end{tikzcd}$$

som är kommutativt och har exakta rader och kolonner.

(Vi skriver bara ut den del, som vi kommer att få användning för.)

Av detta diagram ser vi, att om vi identifierar

$\mathrm{Hom}_Z(B_{k-1}(X), R)$ med sin bild i $\mathrm{Hom}_Z(C_k(X), R)$, så får vi tre grupper innehållande varandra:

$$\mathrm{Im}\, d^{k-1} \subset \mathrm{Hom}(B_{k-1}(X), R) \subset \mathrm{Ker}\, d^k.$$

Den nedre delen av diagrammet medför att

$$\mathrm{Hom}_Z(B_{k-1}(X), R)/\mathrm{Im}\, d^{k-1} \simeq \mathrm{Ext}^1_Z(H_{k-1}(X), R).$$

På liknande sätt medför den övre delen att

$$\mathrm{Ker}\, d^k/\mathrm{Hom}_Z(B_{k-1}(X), R) \simeq \mathrm{Hom}_Z(H_k(X), R).$$

Men vi tillämpar nu följande enkla

<u>Proposition.</u>1. Om $A_0 \subset A_1 \subset A_2$, så är kärnan till den naturliga epimorfismen

$$A_2/A_0 \xrightarrow{p} A_2/A_1 \quad \text{lika med } A_1/A_0,$$

så att

$$0 \longrightarrow A_1/A_0 \longrightarrow A_2/A_0 \xrightarrow{p} A_2/A_1 \longrightarrow 0$$

är exakt.

(Noethers isomorfisats). Vi får alltså:

Sats 5. Det finns en exakt svit

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_Z(H_{k-1}(X), R) \to H^k(X, R) \to \mathrm{Hom}_Z(H_k(X), R) \to 0.$$

Denna formel kallas den universella koefficientformeln.

Man kan precisera den på följande sätt:

Sats 5'. Sviten

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_Z(H_{n-1}(X), R) \longrightarrow H^n(X, R) \xrightarrow{p} \mathrm{Hom}_Z(H_n(X), R) \longrightarrow 0$$

är exakt och splittrad dvs. det finns en homomorfism

$\mathrm{Hom}_Z(H_n(X), R) \xrightarrow{i} H^n(X, R)$ så att $p\,i = \mathrm{id}$.

Innan vi antyder beviset för detta, skall vi härleda ett korollarium. Vi behöver:

Lemma 2. Låt $0 \longrightarrow A_o \xrightarrow{q_o} A \underset{q_1}{\overset{p_1}{\rightleftarrows}} A_1 \longrightarrow 0$

vara exakt, och antag att $p_1 q_1 = \mathrm{id}_{A_1}$. Då finns det en entydigt bestämd homomorfism $A \xrightarrow{p_o} A_o$, så att $\{q_\beta, p_\gamma\}_{\beta,\gamma=0,1}$ ger en representation av A som direkt summa av A_o och A_1. (Se Kap. 1, sid. 29.).

Bevis: Betrakta avbildningen $A \xrightarrow{\varphi} A$, där $\varphi = \mathrm{id}_A - q_1 p_1$. Klart är att $p_1 \varphi = p_1 - (p_1 q_1) p_1 = p_1 - p_1 = 0$, dvs. $\mathrm{Im}\,\varphi \subset \mathrm{Ker}\, p_1 = \mathrm{Im}\, q_o$, så att $\varphi(a) = q_o(a_o)$, där a_o är entydigt bestämt av a. Sätt $p_o(a) = a_o$. Vi får då en homomorfism $A \xrightarrow{p_o} A_o$ så att $\varphi = q_o p_o$, dvs. $\mathrm{id}_A = q_o p_o + q_1 p_1$.

Det återstår nu att visa, att $p_o q_o = id_{A_o}$ och $p_o q_1 = 0$. Men om vi kom-

poserar $id_A = q_o p_o + q_1 p_1$ med q_o, så får vi $q_o = q_o p_o q_o + q_1 p_1 q_o = q_o p_o q_o$

Härav följer $p_o q_o = id_{A_o}$ eftersom q_o är injektiv. På samma sätt visas,

att $p_o q_1 = 0$. V.S.B.

Lemma 2 ger nu följande

Korollarium till Sats 5'. $H^n(X, R)$ är isomorf med direkta summan av $Ext^1_Z(H_{n-1}(X), R)$ och $Hom_Z(H_n(X), R)$. (Det finns dock inte någon kanonisk representation av $H^n(X, R)$ som direkt summa.)

Observera, att enbart existensen av en exakt svit

$$E : 0 \longrightarrow A_o \longrightarrow A \longrightarrow A_1 \longrightarrow 0$$

ej medför att A är isomorf med direkta summan av A_o och A_1.

Exempel: $0 \longrightarrow Z \xrightarrow{\times 2} Z \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$

är exakt men ej splittrad och Z är ej heller isomorf med $Z \amalg Z_2$.

Av lemma 3 i Kap. 1 följer, att om T är en kontravariant additiv funktor, så är $T(E)$ splittrad och exakt, om E är det.

För att bevisa Sats 5 observerar vi, att $E'(k)$ på sid. 44 är en splittrad exakt svit. Detta följer ur

Lemma 3. Varje exakt svit

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow P \longrightarrow 0$$

med P projektiv, är splittrad.

Bevis: Betrakta diagrammet

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "id"] & \\ B \arrow[r] & P \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

exakt rad.

Eftersom P är projektiv, så kan identiteten faktoriseras så, som anges i diagrammet. Men detta innebär just att sviten är splittrad. V.S.B.

[Det överlämnas åt läsaren att med hjälp av detta visa, att en modul P är projektiv då och endast då den är en direkt summand av en fri modul (vi kommer ej att använda detta resultat här).]

Alltså är kolonnerna i diagrammet på sidan 45 splittrade och detta gäller då även om kolonnerna i det transformerade diagrammet på sidan 46. Den entusiastiska läsaren kan nu lätt fullborda beviset för sats 5'.

§ 6. Tillämpning av universella koefficientformeln på Poincarés dualitetssats.

Här är X en kompakt orienterbar differentierbar mångfald,

$$\dim X = n, \quad \text{och} \quad H_k(X) \simeq H^{n-k}(X, Z).$$

Dessutom kan man visa, att grupperna är ändligt genererade.

Sats 5' ger nu följande relation:

$$H_k(X) \simeq \mathrm{Hom}_Z(H_{n-k}(X), Z) \amalg \mathrm{Ext}^1(H_{n-k-1}(X), Z) .$$

Vi har följande splittrade exakta svit

$$0 \longrightarrow H_j(X)_T \longrightarrow H_j(X) \longrightarrow H_j(X)_F \longrightarrow 0$$

där T betyder torsionsdelen, och F den fria delen av gruppen i fråga.

Lemma 4. Låt T vara en torsionsgrupp, och låt R sakna torsion. Då är $\mathrm{Hom}_Z(T, R) = 0$.

Bevis: Låt f vara en homomorfism $T \longrightarrow R$. För varje $t \in T$ finns ett $n \neq 0$ så att $nt = 0$. Då är $0 = f(nt) = nf(t)$, vilket medför, att $f(t) = 0$, ty R har ingen torsion. V.S.B.

Av detta lemma följer att $\mathrm{Hom}_Z(H_{n-k}(X), Z) \simeq \mathrm{Hom}_Z(H_{n-k}(X)_F, Z) \simeq H_{n-k}(X)_F$, och av teorien i Kap. 1 (nederst på sid. 29) följer att

$$\mathrm{Ext}^1_Z(H_{n-k-1}(X), Z) \simeq \mathrm{Ext}^1_Z(H_{n-k-1}(X)_T, Z) \simeq H_{n-k-1}(X)_T .$$

Poincarés dualitetssats splittras alltså upp i två:

$$H_k(X)_F \simeq H_{n-k}(X)_F \qquad \text{och} \qquad H_k(X)_T \simeq H_{n-k-1}(X)_T .$$

Den första ger ett samband mellan Bettitalen $B_k = B_{n-k}$, och den andra ger ett motsvarande samband mellan torsionstalen. Det var så Poincaré ursprungligen formulerade sin sats.

§ 7. Tensorprodukt och dess funktoriella egenskaper.

Låt C_* vara ett komplex över Λ, och R en Λ-modul. Vi har definierat kohomologigrupper av C_* med koefficienter i R genom $H^n(\mathrm{Hom}_\Lambda(C_*, R))$. Vi skall nu införa en ny funktor, tensorprodukt, med vars hjälp vi kommer att införa homologigrupper av C_* med koefficienter i R.

Låt Λ vara en kommutativ ring och L, M, N Λ-moduler.

Definition. Avbildningen $f: M \times N \longrightarrow L$ säges vara bilineär, om alla avbildningar

$$M \ni m \longrightarrow f(m, n^*) \in L \quad \text{för } n^* \in N, \text{ fixt}$$

och

$$N \ni n \longrightarrow f(m^*, n) \in L \quad \text{för } m^* \in M, \text{ fixt}$$

är Λ-homomorfismer.

Vi skall nu visa följande fundamentala sats, som reducerar studiet av bilineära avbildningar definierade på $M \times N$ till studiet av en enda $M \times N \xrightarrow{\varphi} T(M, N)$ och dess kompositioner med Λ-homomorfismer definierade på $T(M, N)$.

Sats 6. Till varje par M, N av Λ-moduler finns det en Λ-modul $T(M, N)$ och en bilineär avbildning $\varphi: M \times N \longrightarrow T(M, N)$ med följande egenskap: Varje bilineär avbildning $f: M \times N \longrightarrow L$, där L är en godtycklig Λ-modul, kan entydigt skrivas $f = g\varphi$, där $g: T(M, N) \longrightarrow L$ är Λ-lineär.

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & T(M, N) \arrow[d, "g"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Dessutom är paret $(T(M, N), \varphi)$ entydigt bestämt sånär som på en entydigt bestämd isomorfism:

Proposition 2. Antag att $(T(M, N), \varphi)$ och $T'(M, N), \varphi')$ uppfyller villkoren i sats 6. Då finns en entydigt bestämd (kanonisk) isomorfism $\tau : T \longrightarrow T'$ så att $\varphi' = \tau\varphi$

Bevis: Betrakta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi'"'] & T \\ & T' \end{tikzcd}$$

Då finns enligt förutsättningen Λ-homomorfismer $\tau : T \longrightarrow T'$ och $\tau' : T' \longrightarrow T$ så att $\varphi' = \tau\varphi$ och $\varphi = \tau'\varphi'$. Alltså är $\varphi = (\tau'\tau)\varphi$. Eftersom $\varphi = id_T\varphi$, följer ur entydigheten av faktoriseringen av φ:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, bend right, "\tau'\tau"'] \arrow[dd, bend left, "id_T"] \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & T \end{tikzcd}$$

att $\tau'\tau = id_T$. På samma sätt visas att $\tau\tau' = id_{T'}$. V.S.B.

Lemma 5. Ett $T(M, N)$, som uppfyller villkoren i Sats 6, Λ-genereras av elementen $\varphi(m, n)$, $m \in M$, $n \in N$.

Bevis: Låt $\overline{T}$ vara den undermodul av T, som genereras av dessa element, och i injektionen av $\overline{T}$ i T. Vi får ett diagram vars nedre del är kommutativ:

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "j"] \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\overline{\varphi}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \overline{T} \arrow[d, "i"] \\ & T \end{tikzcd}$$

(Hur $\overline{\varphi}$ definieras är klart.) Men den övre delen kan kompletteras med j till en kommutativ triangel, på grund av (T, φ):s egenskaper. Härav följer att $ij = id_T$ (entydigheten av faktoriseringen

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dd, bend right, "ij"'] \arrow[dd, bend left, "id_T"] \\ M \times N \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & T \end{tikzcd}$$

),

så att injektionen i är surjektiv, dvs. $\bar{T} = T$. V.S.B.

Generatorerna $\varphi(m, n)$ är ej lineärt oberoende; klart är att det finns följande relationer mellan dem:

$$\text{(BL)} \quad \begin{array}{ll} \varphi(m_1+m_2, n) - \varphi(m_1, n) - \varphi(m_2, n) = 0, & \lambda\varphi(m, n) - \varphi(\lambda m, n) = 0, \\ \varphi(m, n_1+n_2) - \varphi(m, n_1) - \varphi(m, n_2) = 0, & \lambda\varphi(m, n) - \varphi(m, \lambda n) = 0. \end{array}$$

Lemma 6. Om $(T(M, N), \varphi)$ uppfyller villkoren i Sats 6, så gäller att varje relation mellan $\varphi(m, n)$ är en lineär kombination av relationer av typen (BL).

Bevis: Låt S vara den Λ-modul, som genereras av element (m, n) $m \in M$, $n \in N$, med de enda relationerna $(m_1+m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n) = 0$, ... osv. analogt med (BL). Mer precist, låt $F_\Lambda(M, N)$ vara den fria Λ-modulen genererad av (m, n), $m \in M$, $n \in N$, och $R_\Lambda(M, N)$ undermodulen, som genereras av

$$(m_1+m_2, n) - (m_1, n) - (m_2, n), \quad \lambda(m, n) - (\lambda m, n),$$

$$(m, n_1+n_2) - (m, n_1) - (m, n_2), \quad \lambda(m, n) - (m, \lambda n).$$

och sätt $S = F_\Lambda(M, N)/R_\Lambda(M, N)$. Vi betecknar bilden av (m, n) i S temporärt med $(\dot{m, n})$.

Enligt konstruktionen av S, så finns den en bilineär avbildning

$M \times N \xrightarrow{\varphi_S} S$, definierad genom $\varphi_S(m, n) = (\dot{m, n})$.

Vi ska nu se att (S, φ_S) uppfyller villkoren i sats 6.

Låt $M \times N \xrightarrow{f} L$ vara en godtycklig bilineär avbildning. Definiera $g : S \to L$ genom $g(\dot{m, n}) = f(m, n)$. Denna definition är oberoende av representantvalet och ger en entydigt bestämd Λ-homomorfism g så att diagrammet

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\varphi_S"] \arrow[dr, "f"'] & S \arrow[d, "g"] \\ & L \end{tikzcd}$$

blir kommutativt. Detta bevisar Sats 6 och även lemma 6 (tag $L = T$, $f = \varphi$), som endast tagits med av pedagogiska skäl.

Definition: Vi skriver

$$M \otimes_\Lambda N = S = F_\Lambda(M\ N)/R_\Lambda(M, N)$$

och kallar den tensorprodukten av M och N. I stället för $\varphi_S(m, n)$ skriver vi $m \otimes_\Lambda n$.

Anm. Av lemma 5 och 6 följer att elementen $m \otimes_\Lambda n$, med $m \in M$ och $n \in N$, Λ-genererar $M \otimes_\Lambda N$, och de enda relationerna mellan $m \otimes_\Lambda n$ fås genom lineärkombinationer av

$$(m_1 + m_2) \otimes_\Lambda n - m_1 \otimes_\Lambda n - m_2 \otimes_\Lambda n = 0, \ldots, \text{ osv.}$$

Proposition 3. Det finns kanoniska isomorfismer

$$M \otimes_\Lambda N \simeq N \otimes_\Lambda M, \qquad M \otimes_\Lambda \Lambda \simeq M.$$

Bevis: Övning.

Betrakta nu homomorfismer $M \xrightarrow{f} M'$ och $N \xrightarrow{g} N'$, och studera avbildningen

$$M \times N \ni (m, n) \longrightarrow f(m) \otimes g(n) \in M' \otimes_\Lambda N'.$$

Denna är, som lätt ses, bilineär, och inducerar alltså en avbildning $\theta : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N'$, sådan att

$$\theta\,(m \otimes_\Lambda n) = f(m) \otimes_\Lambda g(n).$$

Vi skriver ibland

$$\theta = f \otimes_\Lambda g.$$

Betrakta nu Λ-homomorfismer

$$f : M \longrightarrow M', \quad f' : M' \longrightarrow M'', \quad g : N \longrightarrow N', \quad g' : N' \longrightarrow N''.$$

Då gäller

Proposition 4.

(1) $\quad (f' \otimes_\Lambda g') \circ (f \otimes_\Lambda g) = (f'f) \otimes_\Lambda (g'g)$

(2) $\quad id_M \otimes_\Lambda id_N = id_{M \otimes_\Lambda N}$.

Bevis: Övning. (Använd definitionerna.)

Vi ser att

$$M \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

$$f \longrightarrow f \otimes_\Lambda id_N \qquad \text{för fixt } N,$$

och

$$N \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

$$g \longrightarrow id_M \otimes_\Lambda g \qquad \text{för fixt } M$$

är kovarianta funktioner av M resp. N.

Proposition 5. Funktorerna

$\cdot \otimes_\Lambda N$ och $M \otimes_\Lambda \cdot$ är additiva.

Bevis: $((f_1+f_2) \otimes_\Lambda g)(m \otimes_\Lambda n) =$

$= (f_1+f_2)(m) \otimes_\Lambda g(n) = (f_1(m)+f_2(m)) \otimes_\Lambda g(n) =$

$= f_1(m) \otimes_\Lambda g(n) + f_2(m) \otimes_\Lambda g(n) = (f_1 \otimes_\Lambda g)(m \otimes_\Lambda n) +$

$+ (f_2 \otimes_\Lambda g)(m \otimes_\Lambda n) = (f_1 \otimes_\Lambda g + f_2 \otimes_\Lambda g)(m \otimes_\Lambda n)$ för varje $m \in M$, $n \in N$.

Alltså

$$(f_1+f_2) \otimes_\Lambda g = f_1 \otimes_\Lambda g + f_2 \otimes_\Lambda g \ .$$

Om vi tar $g = id_N$, så följer att $\cdot \otimes_\Lambda N$ är additiv. På samma sätt inses att $M \otimes_\Lambda \cdot$ är additiv. V.S.B.

Sats 7. De additiva funktorerna $\cdot \otimes_\Lambda N$ och $M \otimes_\Lambda \cdot$ är högerexakta.

Bevis: Det räcker att betrakta fallet $\cdot \otimes_\Lambda N$.

Låt

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

vara en exakt svit.

Den ger upphov till en svit

$$0 \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N \xrightarrow{f \otimes_\Lambda id_N} M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{g \otimes_\Lambda id_N} M'' \otimes_\Lambda N \longrightarrow 0 \ ,$$

som i allmänhet ej är exakt.

Skriv tillfälligt

$$f_* = f \underset{\Lambda}{\otimes} id_N, \quad g_* = g \underset{\Lambda}{\otimes} id_N.$$

Vi skall visa att

$$M' \underset{\Lambda}{\otimes} N \xrightarrow{f_*} M \underset{\Lambda}{\otimes} N \xrightarrow{g_*} M'' \underset{\Lambda}{\otimes} N \longrightarrow 0$$

är exakt, dvs. att

1) g_* är surjektiv,

2) $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Ker} g_*$,

3) $\operatorname{Ker} g_* \subset \operatorname{Im} f_*$.

1) Det räcker att visa att $\operatorname{Im} g_*$ innehåller ett generatorsystem till $M'' \underset{\Lambda}{\otimes} N$.

Tag $m'' \underset{\Lambda}{\otimes} n$ med $m'' \in M''$, $n \in N$.

Eftersom g är surjektiv, är $m'' = g(m)$ för något $m \in M$. Då är

$$g_*(m \underset{\Lambda}{\otimes} n) = (g \underset{\Lambda}{\otimes} id_N)(m \underset{\Lambda}{\otimes} n) = g(m) \underset{\Lambda}{\otimes} n = m'' \underset{\Lambda}{\otimes} n.$$

2) Ur $gf = 0$ följer att

$$g_* f_* = (g \underset{\Lambda}{\otimes} id_N)(f \underset{\Lambda}{\otimes} id_N) = gf \underset{\Lambda}{\otimes} id_N = 0 \underset{\Lambda}{\otimes} id_N = 0.$$

3) Vi definierar först en homomorfism χ

$$M'' \underset{\Lambda}{\otimes} N \longrightarrow M \underset{\Lambda}{\otimes} N / \operatorname{Im} f_*.$$

Låt $p : M \underset{\Lambda}{\otimes} N \longrightarrow M \underset{\Lambda}{\otimes} N / \operatorname{Im} f_*$ vara den naturliga projektionen. Tag $(m'', n) \in M'' \times N$. Då är $m'' = g(m)$ för något $m \in M$. Sätt

$$\theta(m'', n) = p(m \underset{\Lambda}{\otimes} n).$$

Detta beror ej av valet av m. Antag nämligen, att

$$g(m_1) = g(m_2) = m''.$$

Då är $m_1 - m_2 \in \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$, alltså $m_1 - m_2 = f(m')$.

Härav följer att

$$m_1 \underset{\Lambda}{\otimes} n - m_2 \underset{\Lambda}{\otimes} n = f(m') \underset{\Lambda}{\otimes} n = f_*(m' \underset{\Lambda}{\otimes} n) \in \operatorname{Im} f_*,$$

och alltså är $p(m_1 \underset{\Lambda}{\otimes} n) = p(m_2 \underset{\Lambda}{\otimes} n)$.

Det överlåtes åt läsaren, att visa att θ är bilineär. Det induceras en avbildning $\chi: M''\otimes_\Lambda N \longrightarrow M\otimes_\Lambda N/\mathrm{Im}\, f_*$ och $\chi\, g_* = p$, ty

$$\chi\, g_*(m\otimes_\Lambda n) = \chi(g(m)\otimes_\Lambda n) = \theta\,(g(m), n) = p(m\otimes_\Lambda n) \quad \text{för alla } m\in M,\ n\in N.$$

Då är $\mathrm{Ker}\, g_* \subset \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{im}\, f_*$. V.S.B.

Anm. Om Λ ej är kommutativ, men M och N är höger- resp. vänster-Λ-moduler, så kan vi på liknande sätt definiera en Z-modul $\widetilde{T}(M, N)$, som är en universell lösning till problemet, att konstruera Z-bilineära avbildningar $M\times N \xrightarrow{f} A$ (A = Z-modul), så att $f(\lambda m, n) = f(m, \lambda n)$. Denna lösning har samma funktoriella egenskaper, som $M\otimes_\Lambda N$ i det kommutativa fallet och vi betecknar den också med $M\otimes_\Lambda N$ (men detta är ej en Λ-modul i allmänhet). Det icke-kommutativa fallet är av stort intresse; gruppringen av en ändlig, ickekommutativ grupp är t. ex. ej kommutativ.

§ 8. Homologigrupper med allmännare koefficienter.

Låt nu C_* vara ett kedjekomplex över ringen Λ (ej nödvändigtvis kommutativ), och R en vänster-Λ-modul.

Låt oss applicera funktorn $\cdot\otimes_\Lambda R$ på C_*. Vi får ett komplex

$$\cdots \longrightarrow C_{n+1}\otimes_\Lambda R \xrightarrow{d_{n+1}\otimes_\Lambda \mathrm{id}_R} C_n\otimes_\Lambda R \xrightarrow{d_n\otimes_\Lambda \mathrm{id}_R} C_{n-1}\otimes_\Lambda R \longrightarrow \cdots$$

som vi betecknar med $C_*\otimes_\Lambda R$. Dess homologigrupp $H_n(C_*\otimes_\Lambda R)$ kallas för n-te homologigruppen för komplexet C_* med koefficienter i R.

Specialfall: $\Lambda = Z$, $C_* = C_*(X)$, R abelsk grupp. $H_n(C_*(X)\otimes_Z R)$ skrives då $H_n(X, R)$ och kallas för n-te singulära homologigruppen för X med koefficienter i R. Om $R = Z$ så får vi tydligen tillbaka $H_n(X)$. Därför skrives dessa grupper ofta utförligare som $H_n(X, Z)$.

Problem: Vilket är sambandet mellan grupperna $H_n(X, R)$ och $H_n(X)\otimes_Z R$?

Om $\cdot\otimes_Z R$ är en exakt funktor, (vilket inträffar om R saknar torsion), så är de lika, som man lätt inser. I nästa kapitel skall vi införa en ny funktor,

$Tor_1^Z(\cdot, R)$, som mäter avvikelsen för exakthet hos $\cdot \otimes_Z R$. Vi får då en splittrad exakt svit

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes_Z R \longrightarrow H_n(X, R) \longrightarrow Tor_1^Z(H_{n-1}(X), R) \longrightarrow 0$$

(Universella koefficientformeln för homologigrupper).

Man kan även visa följande:

Låt X och Y vara två topologiska rum, $X \times Y$ deras topologiska produkt. Det finns då en exakt splittrad svit

$$0 \longrightarrow \coprod_{p+q=n} H_p(X) \otimes_Z H_q(Y) \longrightarrow H_n(X \times Y) \longrightarrow \coprod_{p+q=n-1} Tor_1^Z(H_p(X), H_q(Y)) \longrightarrow 0$$

(Künneths formel).

——— 0 ——— 0 ———

Lunds Universitet
Matematiska Institutionen

Föreläsningar i homologisk algebra
HT 1961 Jan-Erik Roos
(redigerade under medverkan av
Sven Spanne)

KAPITEL 3. ALLMÄN TEORI FÖR SATELLITER AV HALVEXAKTA FUNKTORER. TILLÄMPNINGAR.

(23 september, 7, 14 och 21 oktober 1961)

Résumé.

Vi kommer nu till den centrala punkten i föreläsningarna. I detta kapitel skall vi nämligen studera en allmän halvexakt additiv funktor T och dess avvikelse från höger- och vänsterexakthet. Vi leds på så sätt till att införa s.k. höger- och vänstersatellitfunktorer av T. Dessa är också halvexakta, och iterering av proceduren ger högre satelliter, vilka tillsammantagna ger mycket precisa upplysningar om T. Vårt huvudresultat är en lång exakt svit, som sammanbinder T med alla sina höger- och vänstersatelliter (sats ~~13~~ 12 i §10). Om funktorn T dessutom redan är exakt åt höger eller vänster (vilket är fallet med $\otimes$ och Hom så kan satelliterna fås som homologi- resp. kohomologigrupper av vissa komplex, s.k. upplösningar. (I det allmänna fallet ger dessa komplex endast de s.k. deriverade funktorerna av T) Som tillämpning bevisas en klassisk sats av Hilbert om graduerade moduler över polynomringen i n variabler över en kropp. (Syzygiesatsen).

Satelliterna av $\otimes$ och Hom studeras sedan ganska ingående. Våra resultat generaliserar bl.a. dem vi fick i kapitel 1 och 2.

Kapitlet avslutas med ett studium av induktivt och projektivt limes, samt en motivering för den speciella roll, som funktorerna Hom, $\otimes$ och deras satelliter spelar i den homologiska algebran.

Läsaren finner måhända detta kapitel väl tekniskt. Det torde emellertid observeras, att §§1-4 grundligt förberetts i kapitel 1 (studiet av exakthet hos Hom); i många avseenden är det nästan samma resonemang, som kommer igen i det allmänna fallet. Komplex har redan studerats i kapitel 2.

Resultatet om möjligheten att beräkna satelliter med hjälp av upplösningar och teorien för sammanhängande sviter av funktorer (§ 7) har många praktiska tillämpningar. Använda i ett litet vidare sammanhang ger de möjlighet att t. ex. systematisera studiet av Cousins första och andra problem i teorien för analytiska funktioner av flera komplexa variabler (kapitel 4). Proposition 6 i § 7 ger (tillsammans med bladverksteori och det faktum att differentierbar partition av enheten är möjlig på en parakompakt differentierbar mångfald X) ett enkelt bevis för de Rhams klassiska sats om möjligheten att konstruera kohomologiska invarianter för X, med hjälp av differentialformer på X. (Kapitel 5). Den kohomologiteori, som användes i detta sammanhang, är den Grothendieckska; den konstrueras med hjälp av upplösningar, och sammanfaller med Čechs klassiska teori om rummet är parakompakt. (se kapitel 4, 5.)

Allmänt kan sägas, att detta kapitel ger en ganska fullständig bild av grunddragen av den <u>additiva</u> homologiska algebran. (Jfr dock kapitel 6.)

§ 1. <u>Begreppet funktor.</u>

Alla ringar Λ, som betraktas i detta kapitel förutsättes ha enhetselement, och med modul över Λ menas en unitär vänstermodul då inget annat säges.

Låt oss påminna om funktorbegreppet.

Låt Λ och Λ' vara två ringar.

<u>Definition.</u> En avbildning

$$T \left\{ \begin{array}{l} M \longrightarrow T(M) \\ f \longrightarrow T(f) \end{array} \right.$$

som till varje Λ-modul M ordnar en Λ'-modul $T(M)$, <u>och</u> till varje Λ-homomorfism $M \xrightarrow{f} N$ ordnar en Λ'-homomorfism $T(M) \xrightarrow{T(f)} T(N)$ (resp. $T(N) \xrightarrow{T(f)} T(M)$), så att

1) $T(fg) = T(f)T(g)$ resp. 1) $T(fg) = T(g)T(f)$

2) $T(Id_M) = Id_{T(M)}$ 2) $T(Id_M) = Id_{T(M)}$

kallas för en kovariant (resp. kontravariant) funktor från Λ-moduler till Λ'-moduler. (Egentligen bör man säga: från kategorien av Λ-moduler till... etc. Se kapitel 6.) Funktorn T säges vara additiv, om $T(f+g) = T(f) + T(g)$ för varje $f, g \in Hom(M, N)$, och alla M, N.

Exempel 1. Låt N vara en fix höger Λ-modul. Vi har i kapitel 2 definierat en avbildning

$$N \otimes_\Lambda \cdot \begin{cases} M \longrightarrow N \otimes_\Lambda M \\ f \longrightarrow Id_N \otimes_\Lambda f \end{cases}$$

från Λ-moduler till $\mathbb{Z}$-moduler, och vi har sett att $N \otimes_\Lambda \cdot$ är en kovariant additiv funktor.

Exempel 2.

$$Hom_\Lambda(\cdot, R) \begin{cases} M \longrightarrow Hom_\Lambda(M, R) \\ f \longrightarrow Hom_\Lambda(f, R) \end{cases}$$

är en kontravariant additiv funktor från Λ-moduler till $\mathbb{Z}$-moduler.

Exempel 3.

$$Hom_\Lambda(R, \cdot) \begin{cases} M \longrightarrow Hom_\Lambda(R, M) \\ f \longrightarrow Hom_\Lambda(R, f) \end{cases}$$

är en kovariant additiv funktor från Λ moduler till $\mathbb{Z}$-moduler. Dessutom har vi visat, att funktorerna $N \otimes_\Lambda \cdot$ och $Hom_\Lambda(\cdot, R)$ uppfyller vissa exakthets-axiom. Låt oss precisera detta med hjälp av en

Definition. Låt T vara en kovariant additiv funktor från Λ-moduler till Λ'-moduler, och

$$E: \; 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

en exakt svit av Λ-moduler. Vi säger att T är resp. halvexakt, högerexakt, vänsterexakt, exakt om motsvarande svit av Λ'-moduler:

$$T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

$$T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

$$0 \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N) \longrightarrow 0$$

är exakt för varje E. Man har motsvarande definitioner för <u>kontravarianta</u> additiva funktorer.

Exempel: $N \otimes_\Lambda \cdot$ är högerexakt,

$\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, R)$ är vänsterexakt.

$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\cdot, R)$ (se sid. 31) är halvexakt (bevisas senare).

<u>Övning.</u> Visa, att $\mathrm{Hom}_\Lambda(R, \cdot)$ är vänsterexakt.

Exempel på en icke additiv funktor:

$$A \longrightarrow A \otimes_\Lambda A \qquad (\Lambda \text{ kommutativ}).$$

$$f \longrightarrow f \otimes_\Lambda f$$

Denna funktor är högerexakt i en mening, som ej kan preciseras här. Vi kommer i fortsättningen att hålla oss till additiva funktorer, och påpekar ej detta i varje särskilt fall. (Jfr dock § 5.) För att ej tynga ned framställningen i fortsättningen, kommer vi ej heller i onödan precisera över vilken ring vi betraktar modulerna.

§ 2. <u>Vänstersatelliter av halvexakta kovarianta funktorer. I.</u>

Låt T vara en kovariant halvexakt funktor, och

$$E : 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

en exakt svit. Då är

$$T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

exakt, men T(f) (resp. T(g)) är ej nödvändigtvis injektiv (resp. surjektiv). Låt oss börja med att studera hur $G(E) = \mathrm{Ker}\ T(f)$ varierar med E, då N hålles fix.

Vi säger som tidigare att $E > E'$, om diagrammet

$$\begin{array}{lccccccccc} E & 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ E' & 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow[f']{} & M' & \xrightarrow[g']{} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kan utvidgas med avbildningen $m : M \longrightarrow M'$, så att diagrammet

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g} & N \\ {\scriptstyle m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ M' & \xrightarrow[g']{} & N \end{array}$$

blir kommutativt. På samma sätt som på sid. 21 ser vi att det finns en entydigt bestämd homomorfism $l : L \longrightarrow L'$ som gör

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 0 & \longrightarrow & L' & \xrightarrow[f']{} & M' & \xrightarrow[g']{} & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

kommutativt.

Om vi applicerar T på detta diagram, så får vi diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & G(E) & \xrightarrow{i} & T(L) & \xrightarrow{T(f)} & T(M) & \xrightarrow{T(g)} & T(N) \\ & & \downarrow{\scriptstyle u} & & \downarrow{\scriptstyle T(l)} & & \downarrow{\scriptstyle T(m)} & & \downarrow{\scriptstyle id} \\ 0 & \longrightarrow & G(E') & \xrightarrow[i']{} & T(L') & \xrightarrow[T(f')]{} & T(M') & \xrightarrow[T(g')]{} & T(N) \end{array}$$

som är kommutativt och har exakta rader. (Avbildningen u induceras av $T(l)$ på samma sätt som ovan.)

Analogt med Prop. 5 i kapitel 1 gäller att u är oberoende av valet av avbildningen $m : M \longrightarrow M'$ med $g'm = g$, och dessutom gäller, att om $E_1 > E_2 > E_3$ så är $u_{23}u_{12} = u_{13}$ (jfr sid. 23).

Situationen är alltså analog till den i kapitel 1, där vi studerade ett dualt fall: den kontravarianta funktorn $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\cdot, R)$. Avbildningen, som svarade mot u var då injektiv; vi kan alltså vänta oss att $G(E) \xrightarrow{u} G(E')$ är surjektiv.

Detta är riktigt (Sats 1), men beviset är en aning mer komplicerat, ty funktorn T förutsättes endast vara halvexakt. Avvikelsen från vänsterexakthet $G(E)$ blir således maximal när E är maximal.

Som förberedelse till beviset för detta, visar vi nu ett tekniskt mycket användbart lemma, av vilket specialfall redan förekommit åtskilliga gånger tidigare.

§ 3. "Orm"-lemmat. (Jfr Bourbaki, Algèbre Commutative, Chap. I, § 1, n° 4.)

Betrakta ett kommutativt diagram, med exakta rader.

$$\begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{f} & M & \xrightarrow{g} & N \\ \downarrow{\scriptstyle l} & & \downarrow{\scriptstyle m} & & \downarrow{\scriptstyle n} \\ L' & \xrightarrow{f'} & M' & \xrightarrow{g'} & N' \end{array}$$

Inför beteckningen $\text{Coker } l = L'/\text{Im } l$ ......

(Man kan också införa $\text{Coim } l = L/\text{Ker } l$. För kategorien av moduler är emellertid detta begrepp ointressant eftersom l definierar isomorfism $\text{Coim } l \xrightarrow{\sim} \text{Im } l$.)

Som vi tidigare sett vid flera tillfällen, inducerar f, .. f' entydigt bestämda homomorfismer $\text{Ker } l \xrightarrow{\bar{f}} \text{Ker } m$ ... och $\text{Coker } l \xrightarrow{\bar{f'}} \text{Coker } m$ så att diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Ker}\, l \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, m \arrow[r, "\bar g"] \arrow[d] & \mathrm{Ker}\, n \arrow[d] & (\mathrm{Ker}) \\
L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "l"'] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "m"] & N \arrow[d, "n"] & \\
L' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "p_{L'}"'] & M' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "p_{M'}"] & N' \arrow[d, "p_{N'}"] & \\
\mathrm{Coker}\, l \arrow[r, "\bar f'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\, m \arrow[r, "\bar g'"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}\, n \arrow[d] & (\mathrm{Coker}) \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

blir kommutativt. Dessutom är kolonnerna och mittraderna exakta. Vi skall ge villkor som garanterar att raderna Ker och Coker blir exakta.

<u>Lemma 1.</u> (a) Om f' är injektiv, så är Ker exakt.

Om g är surjektiv, så är Coker exakt.

(b) Om f' är injektiv <u>och</u> g surjektiv, så finns en homomorfism $\delta : \mathrm{Ker}\, n \longrightarrow \mathrm{Coker}\, l$, så att sviten

$$\mathrm{Ker}\, l \longrightarrow \mathrm{Ker}\, m \longrightarrow \mathrm{Ker}\, n \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}\, l \longrightarrow \mathrm{Coker}\, m \longrightarrow \mathrm{Coker}\, n$$

blir exakt.

<u>Bevis.</u> Utan något extraantagande följer, att $\bar g\, \bar f = \overline{gf} = \bar 0 = 0$, dvs. $\mathrm{Im}\, \bar f \subset \mathrm{Ker}\, \bar g$. Låt oss visa, att vi har likhet här om f' är injektiv. Tag ett $\mu \in \mathrm{Ker}\, \bar g$. Då är $\bar g(\mu) = g(\mu) = 0$, (vi identifierar $\mathrm{Ker}\, m$ med sin bild i M) så att $\mu = f(\lambda)$ för något $\lambda \in L$. Härav följer, att $(f'l)(\lambda) = (mf)(\lambda) = m(\mu) = 0$, eftersom $\mu \in \mathrm{Ker}\, \bar g \subset \mathrm{Ker}\, m$. Men f' är injektiv. Alltså är $l(\lambda) = 0$, dvs. $\lambda \in \mathrm{Ker}\, l$. Men detta innebär att $\mu = \bar f(\lambda)$, och vi har alltså motsatta inklusionen $\mathrm{Ker}\, \bar g \subset \mathrm{Im}\, \bar f$. Det andra påståendet i (a) bevisas på samma sätt.

För att bevisa (b) konstruerar vi först den sammanbindande homomorfismen δ. Följ den streckade linjen i diagrammet ~~på mtd.~~ ovan.

Tag $\nu \in \mathrm{Ker}\, n \subset N$. Då är $\nu = g(\mu)$, ty g är surjektiv. Sätt $\mu' = m(\mu)$.

Vi får att $g'(\mu') = (g'm)(\mu) = (n\,g)(\mu) = n(\nu) = 0$. Alltså är $\mu' = f'(\lambda')$, och vi sätter $\delta(\nu) = p_{L'}(\lambda') = \overline{\lambda'}$.

Elementet $\delta(\nu)$ beror ej av valen av μ och λ'. Antag nämligen att $\nu = g(\mu_1)$. Då är $g(\mu - \mu_1) = 0$, och alltså är $\mu - \mu_1 = f(\lambda)$. Härav följer $(f'l)(\lambda) = (m\,f)(\lambda) = m(\mu - \mu_1) = \mu' - \mu_1'$. Dessutom är $f'(\lambda') = \mu'$ och $f'(\lambda_1') = \mu_1'$, så att $f'(l(\lambda) - (\lambda' - \lambda_1')) = 0$, och efterom f' är injektiv, är $l(\lambda) = \lambda' - \lambda_1'$, vilket medför att $\lambda' - \lambda_1' \in \operatorname{Im} l = \operatorname{Ker} p_{L'}$. Härav följer att $p_{L'}(\lambda') = p_{L'}(\lambda_1')$, vilket betyder att $\delta(\nu)$ är entydigt bestämd.

Det är dessutom klart att δ är en homomorfism.

Nu återstår att visa att sviten i (b) är exakt. Kvar att verifiera är att

$$\operatorname{Ker} m \xrightarrow{\bar g} \operatorname{Ker} n \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker} l \xrightarrow{\overline{f'}} \operatorname{Coker} m$$

är exakt.

1) $\operatorname{Im} \bar g \subset \operatorname{Ker} \delta$

Antag att $\nu \in \operatorname{Im} \bar g$, dvs. att $\nu = \bar g(\mu)$ för $\mu \in \operatorname{Ker} m$. Då är redan $\mu' = m(\mu) = 0$, och alltså $\delta(\nu) = 0$.

2) $\operatorname{Ker} \delta \subset \operatorname{Im} \bar g$

Antag $\delta(\nu) = 0$. Tag μ så att $\nu = g(\mu)$. Då är $m(\mu) = f'(\lambda')$, och $\lambda' \in \operatorname{Im} l$, eftersom $\delta(\nu) = p_{L'}(\lambda') = 0$. Alltså är $m(\mu) = (f'\,l) = (m\,f)(\lambda)$.

Betrakta $\mu - f(\lambda)$. Vi har att $m(\mu - f(\lambda)) = 0$. Då är $\mu - f(\lambda) \in \operatorname{Ker} m$, och $g(\mu - f(\lambda)) = g(\mu) - (g\,f)(\lambda) = g(\mu) = \nu$, så att $\nu \in \operatorname{Im} \bar g$.

3) $\operatorname{Im} \delta \subset \operatorname{Ker} \overline{f'}$

Antag $\overline{\lambda'} = \delta(\nu)$. Välj μ och λ' som i konstruktionen av δ. Då är $\overline{f'}(\overline{\lambda'}) = (p_{M'}\,m)(\mu) = 0$, eftersom $p_{M'}m = 0$.

4) $\operatorname{Ker} \overline{f'} \subset \operatorname{Im} \delta$

Antag att $\overline{f'}(\overline{\lambda'}) = 0$. Tag ett λ', så att $p_{L'}(\lambda') = \overline{\lambda'}$. Då är $(p_{M'}f')(\lambda') = (\overline{f'}\,p_{L'})(\lambda') = 0$ varav följer att $f'(\lambda') \in \operatorname{Ker} p_{M'} = \operatorname{Im} m$. Alltså är $f'(\lambda') = m(\mu)$. Sätt $\nu = g(\mu)$. Det är då klart att $\delta(\nu) = \overline{\lambda'}$.

I fortsättningen kommer δ alltid att betyda den i beviset konstruerade homomorfismen. Det överlämnas åt läsaren att undersöka i vad mån δ är entydigt bestämd.

§ 4. Vänstersatelliter av halvexakta kovarianta funktorer. II.

Vi fortsätter nu diskussionen från § 2. Som en första tillämpning av Lemma 1 börjar vi med ett enkelt bevis för den utlovade

<u>Sats 1.</u> Om $E: \ 0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ och

$E': \ 0 \longrightarrow L' \longrightarrow M' \longrightarrow N' \longrightarrow 0$ är två exakta sviter med $E > E'$, T en halvexakt kovariant funktor, $G(E) = \mathrm{Ker}(T(L) \longrightarrow T(M))$, så är $G(E) \xrightarrow{u} G(E')$ (se § 2) en epimorfism.

<u>Bevis.</u> Låt oss försöka använda bevismetoden i kapitel 1, § 5. En väsentlig punkt i beviset var observationen, att det räcker att finna ett $\tilde{E} > E$ (och alltså $> E'$) så att $G(\tilde{E}) \longrightarrow G(E')$ är surjektiv.

Vi har nämligen en kanonisk faktorisering

$$\begin{tikzcd}
G(\tilde{E}) \arrow[r] \arrow[dr] & G(E) \arrow[d, "u"] \\
 & G(E')
\end{tikzcd}$$

och ur denna följer, att u <u>a fortiori</u> är surjektiv. I fortsatt analogi med kapitel 1 kunde vi nu taga som $\tilde{E}$ en maximal svit på N så att i diagrammet:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{L} \arrow[r] \arrow[d, "1'"] & \tilde{M} \arrow[r] \arrow[d, "m'"] & N \arrow[r] \arrow[d, "id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$1'$ och m' blev surjektiva. [En sådan svit $\tilde{E}$ kan konstrueras, t.o.m. så att $\tilde{M}$ blir projektiv. (Se kapitel 1, § 5.)]

Diagrammet ovan kan då kompletteras till

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & L'' \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d] & L'' \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \widetilde{L} \arrow[r] \arrow[d, "1'"] & \widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] \arrow[d] & M' \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

där raderna och kolonnerna är exakta. Om vi tillämpar T på detta diagram, och kompletterar med $G(\widetilde{E})$ och $G(E')$ och sedan försöker resonera analogt med loc. cit., så stöter vi på en väsentlig svårighet: $T(1')$ är surjektiv endast om T är högerexakt. Eftersom vi försöker göra en teori för en allmän halvexakt funktor, så fordras här alltså en ny idé. Vi skall konstruera ett $\widetilde{E}$ som är större än E' (och alltså > E) så att motsvarande första vertikala svit i diagrammet ovan ej endast blir exakt, utan även splittrad (se sid. 47). Då överföres den av T i en exakt (t.o.m. splittrad) svit (se kapitel 1, Lemma 3 för det kontravarianta fallet) och $T(1')$ blir speciellt surjektiv, så att vi kunde nu upprepa resonemanget i kapitel 1. I stället kommer vi att använda Lemma 1, varvid resultatet faller ut direkt.

Konstruktion av $\widetilde{E}$.

Av tekniska skäl börjar vi med två godtyckliga exakta sviter på N:

$$E_1: \quad 0 \longrightarrow L_1 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{g_1} N \longrightarrow 0$$

och $$E_2: \quad 0 \longrightarrow L_2 \xrightarrow{f_2} M_2 \xrightarrow{g_2} N \longrightarrow 0$$

(Senare kommer vi att välja $E_1 = E'$, $E_2 = E$.)

Sätt $F = \{(m_1, m_2) \mid g_1(m_1) = g_2(m_2)\} \subset M_1 \amalg M_2$.

Avbildningen $M_1 \amalg M_2 \ni (m_1, m_2) \longrightarrow m_2 \in M_2$ definierar då genom restriktion en avbildning $F \xrightarrow{p_2} M_2$, som är surjektiv. Tag nämligen ett $m_2 \in M_2$. Då finns eftersom g_1 är surjektiv, ett $m_1 \in M_1$ så att $g_1(m_1) = g_2(m_2)$. Vidare är $\operatorname{Ker} p_2 \xrightarrow{\sim} L_1$, ty

$$\operatorname{Ker} p_2 = \{(m_1, m_2) \mid g_1(m_1) = g_2(m_2),\ m_2 = 0\} = \{(m_1, 0) \mid g_1(m_1) = 0\} =$$
$$\simeq \operatorname{Ker} g_1 \simeq L_1.$$

Av symmetrien mellan E_1 och E_2 följer att diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & & L_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d, "i_2"] & L_2 \arrow[d, "f_2"] & \\
E_{M_2} & 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & F \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "g_2"] & 0 \\
E_1 & 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f_1"'] & M_1 \arrow[r, "g_1"'] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

är kommutativt med exakta rader och kolonner. Här definieras i_1 genom $L_1 \xrightarrow{(f_1, 0)} M_1 \amalg M_2$ (bilden ligger i den undermodul av $M_1 \amalg M_2$, som vi identifierat med F). På samma sätt definieras i_2.

Genom komposition av avbildningar får vi alltså en epimorfism

$$\varphi = p_1 g_1 = g_2 p_2 : F \longrightarrow N$$

och följaktligen ett kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_1"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f_1"] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{1}$$

Men $\operatorname{Ker} \varphi = \{(m_1, m_2) \mid g_1(m_1) = g_2(m_2) = 0\} \simeq L_1 \amalg L_2.$

Alltså kan (1) kompletteras till

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & & L_2 \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d] & L_2 \arrow[d, "i_2"] & & \\
\tilde{E}: & 0 \arrow[r] & L_1 \amalg L_2 \arrow[r, "i"] \arrow[d] & F \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "p_1"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & 0 \\
E_1: & 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & M_1 \arrow[r, "g_1"] \arrow[d] & N \arrow[r] & 0 \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

~~men~~ som är kommutativt och har exakta rader och kolonner. I den första kolonnen definieras avbildningarna av den naturliga uppspaltningen i direkt summa. Avbildningen $L_1 \amalg L_2 \xrightarrow{i} F$ är lika med

$$L_1 \amalg L_2 \xrightarrow{(i_1,\, i_2)} F .$$

Vi har alltså kommit till den situation vi förutspådde. Applicera nu T på diagrammet. Vi får

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & \\
 & & T(L_2) \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[d] & T(L_2) \arrow[r] \arrow[d, "T(i_2)"] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & G(\tilde{E}) \arrow[r] \arrow[d] & T(L_1 \amalg L_2) \arrow[r] \arrow[d] & T(F) \arrow[r] \arrow[d] & T(N) \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
0 \arrow[r] & G(E_1) \arrow[r] & T(L_1) \arrow[r] \arrow[d] & T(M_1) \arrow[r] & T(N) \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

med exakta rader och kolonner. Tillämpa Lemma 1 på den inringade delen av diagrammet. Vi får en exakt svit

$$0 \longrightarrow G(E_{M_1}) \longrightarrow G(\tilde{E}) \longrightarrow T(L_1) \longrightarrow \operatorname{Coker} T(i_2)$$

Men kärnan av den sista avbildningen är tydligen densamma som kärnan av $T(L_1) \xrightarrow{T(f_1)} T(M_1)$. (Detta följer ur nedre mellersta delen av diagrammet och ur definitionen av avbildningarna för Coker i Lemma 1.) Vi kan alltså skriva om den exakta sviten som

$$(2) \quad 0 \longrightarrow G(E_{M_1}) \longrightarrow G(\tilde{E}) \longrightarrow T(L_1) \xrightarrow{T(f_1)} T(M_1)$$

Men här kan avbildningen $G(\tilde{E}) \longrightarrow T(L_1)$ faktoriseras

$$\begin{tikzcd}
 & G(\tilde{E}) \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
0 \arrow[r] & G(E_1) \arrow[r] & T(L_1) \arrow[r] & T(M_1)
\end{tikzcd}$$

(Betrakta nedre vänstra hörnet av diagrammet.) Men då måste $G(\tilde{E}) \longrightarrow G(E_1)$ vara surjektiv eftersom $\operatorname{Im}(G(\tilde{E}) \longrightarrow T(L_1)) = \operatorname{Ker}(T(L_1) \longrightarrow T(M_1)) = G(E_1)$.

Sats 1 är således bevisad (välj $E_1 = E'$, $E_2 = E$).

Vi ser alltså, att om $E > E'$, så är $G(E')$ en kvot av $G(E)$. För att få $G(E)$ så stor som möjligt, bör vi alltså välja E som en maximal svit, t.ex. som en svit med en projektiv term i mitten (kapitel 1).

Om E_1 och E_2 är maximala, så finns det en entydigt bestämd isomorfism $G(E_1) \xrightarrow{\sim} G(E_2)$. För att få det hela kanoniskt väljer vi den svit $E_{N, max}$, som konstruerats med hjälp av lemma 2, sid. 26, och gör följande

Definition: $G(E_{N, max})$ betecknas med $S_1T(N)$ och kallas för första vänstersatelliten av T.

För att undersöka hur $S_1T(N)$ beror på N gör vi först följande allmänna observation: Låt $M \xrightarrow{f} N$ vara en homomorfism och betrakta två exakta sviter, som slutar med M resp. N:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
E_M: & 0 & \longrightarrow & J(M) & \longrightarrow & K(M) & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & \downarrow f & & \\
E_N: & 0 & \longrightarrow & J(N) & \longrightarrow & K(N) & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Om det finns en homomorfism $k: K(M) \longrightarrow K(N)$, som, insatt i diagrammet ovan gör det kommutativt, så låt j vara den inducerade homomorfismen $J(M) \longrightarrow J(N)$. Applicera T, och inför $G(E_M)$ och $G(E_N)$ som tidigare. Vi får en naturlig homomorfism $G(E_M) \longrightarrow G(E_N)$, och den beror endast på f. Beviset lämnas åt läsaren. Denna entydighet ger transitivitet etc. Härav följer speciellt att $S_1T(N)$ är en del av en additiv kovariant funktor, S_1T, den första vänstersatellitfunktorn av T. (Jfr motsvarande situation för Ext^1 på sid. 30.) Låt oss nu återvända till den exakta sviten ($\mathcal{2}$). Om vi väljer E_1 maximal på N, så blir också $\tilde{E}$ maximal, och alltså $G(\tilde{E}) \xrightarrow{\sim} S_1T(N)$. Det följer av definitionen av δ i lemma 1, att $G(E_{M_1}) \longrightarrow G(\tilde{E})$ är just den avbildning, som induceras som ovan av

$$
\begin{array}{lccccccccc}
E_{M_1}: & 0 & \longrightarrow & L_2 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & M_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow g_1 & & \\
\tilde{E}: & 0 & \longrightarrow & L_1 \amalg L_2 & \longrightarrow & F & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Betrakta nu $E_{M_1, \max}$. Motsvarande G avbildas på $G(E_{M_1})$, och vi får alltså av (2) en exakt svit

$$S_1T(M_1) \longrightarrow S_1T(N) \longrightarrow T(L_1) \xrightarrow{T(f_1)} T(M_1)$$

där den första avbildningen är $S_1T(g_1)$ enligt transitiviteten och entydigheten av inducerade avbildningar ovan. Denna svit kan fortsättas ett steg till höger med $\xrightarrow{T(g_1)} T(N)$ för T är halvexakt. Samma sak kan göras till vänster:

Proposition 1. Funktorn S_1T är halvexakt.

Bevis. Låt $0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ vara en exakt svit, och

$$0 \longrightarrow K_L \longrightarrow P_L \xrightarrow{p_L} L \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow K_N \longrightarrow P_N \xrightarrow{p_N} N \longrightarrow k$$

exakta sviter med P_L och P_N projektiva (t.ex. fria). Då kan vi konstruera ett kommutativt diagram

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K_L \arrow[r] \arrow[d] & K_M \arrow[r] \arrow[d] & K_N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_L \arrow[r] \arrow[d, "p_L"'] & P_M \arrow[r] \arrow[d, "p_M"'] & P_N \arrow[r] \arrow[d, "p_N"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d] & M \arrow[r, "g"] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

med exakta rader och kolonner:

Sätt $P_M = P_L \amalg P_N$.

Eftersom P_N är projektiv, så finns det en homomorfism $P_N \xrightarrow{n} M$ så att $g n = p_N$. Sätt $l = f p_L$, och definiera $p_M = (l, n)$. Homomorfismerna i den horisontella mittraden definieras på naturligt sätt. Det är lätt att se, att p_M blir surjektiv och nedre delen av diagrammet kommutativt.

Sätt nu $K_M = \operatorname{Ker} p_M$. Ur lemma 1 följer då att även övre delen av diagrammet är exakt och kommutativt. Applicera nu funktorn T. Vi får:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & S_1T(L) \arrow[r, "S_1T(f)"] \arrow[d] & S_1T(M) \arrow[r, "S_1T(g)"] \arrow[d] & S_1T(N) \arrow[d] & \\
 & T(K_L) \arrow[r] \arrow[d] & T(K_M) \arrow[r] \arrow[d] & T(K_N) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & T(P_L) \arrow[r] & T(P_L \amalg P_N) \arrow[r] & T(P_N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

och enligt lemma 1 är den översta raden exakt. VSB.

Eftersom S_1T är <u>halvexakt</u> kovariant additiv, så kan vi med den upprepa hela det föregående resonemanget i § 2 och 4 etc. Vi gör en

<u>Definition:</u> $S_0T = T$, $S_nT = S_1(S_{n-1}T)$, $n \geq 1$.

Funktorn S_nT kallas n-te vänstersatelliten av T.

Våra resultat kan nu sammanfattas i

<u>Sats 2.</u> Låt T vara en kovariant halvexakt funktor. Då har n-te vänstersatelliten S_nT samma egenskaper, och om

$$E: 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

är en exakt svit, så finns det homomorfismer $S_nT(N) \xrightarrow{\delta_n(E)} S_{n-1}T(L)$ så att sviten

$$\cdots \longrightarrow S_{n+1}T(N) \xrightarrow{\delta_{n+1}} S_nT(L) \xrightarrow{S_nT(f)} S_nT(M) \xrightarrow{S_nT(g)} S_nT(N) \xrightarrow{\delta_n}$$

$$\longrightarrow S_{n-1}T(L) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_1T(M) \xrightarrow{S_1T(g)} S_1T(N) \xrightarrow{\delta_1} T(L) \xrightarrow{T(f)}$$

$$\longrightarrow T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

blir exakt.

Dessutom kan avbildningarna δ_n väljas så att de blir naturliga i den meningen, att om

$$\begin{array}{llllllllll}
E & 0 \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & m & \downarrow & & \\
E' & 0 \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

är ett kommutativt diagram med exakta rader, så blir diagrammen

$$\begin{array}{ccc}
S_{n+1}T(N) & \xrightarrow{\delta_{n+1}(E)} & S_nT(L) \\
S_{n+1}T(n) \downarrow & & \downarrow S_nT(l) \\
S_{n+1}T(N') & \xrightarrow{\delta_{n+1}(E')} & S_nT(L')
\end{array} , \qquad n \geq 0$$

kommutativa.

Bevis: Vi har redan bevisat allt utom sista påståendet, vilket lämnas som övning till läsaren.

Anm. Vi skall senare fortsätta sviten i Sats 2 åt höger.

§ 5. Satelliter av icke additiva funktorer och analogi med differentialkalkylen.

Låt T vara en icke nödvändigtvis additiv funktor (med $T(0) = 0$, vilket ej är en väsentlig inskränkning) från Λ-moduler till (t. ex.) $\mathbb{Z}$-moduler. Man kan då intressera sig för att mäta dess avvikelse från additivitet. Det är lätt att se, att

$$(3) \qquad T(A \amalg B) - \big(T(A) \amalg T(B)\big)$$

har en mening. (Av funktorsegenskapen följer nämligen att $T(A) \amalg T(B)$ är en direkt faktor i $T(A \amalg B)$) Formeln (3) definierar då en funktor i två variabler. Om denna funktor är additiv i den ena variabeln då den andra hålles fix, så säger vi att T är en kvadratisk funktor. Genom att studera högre differenser kan man definiera n-additiva funktorer. Utgå nu från T. Man visar lätt att det finns "bästa" approximationer av T med additiva, kvadratiska, ... n-additiva funktorer ... . (Approximationerna definieras som lösningar till vissa universella problem. Mer detaljer kommer i en senare publikation av förf.) Den additiva approximationen av T, första differensen av den kvadratiska approximationen av T, etc. ger en familj additiva funktorer associerade med T. Det hela liknar differentialkalkylens Taylorutveckling av reella deriverbara funktioner. Situationen är emellertid i viss mening mer komplicerad i vårt fall. Bildningen

$$\mathcal{M}_\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} \text{"Alla" } \Lambda\text{-moduler}, \\ \text{alla } \Lambda\text{-homomorfismer} \end{array} \right\} \quad (\Lambda \text{ fix})$$

är nämligen en mycket mer komplicerad sak än $\mathbb{R}$. Låt A och B vara två Λ-moduler. Man har flera sorters summa av A och B i $\mathcal{M}_\Lambda$:

1) $A \amalg B$

2) Om E är en Λ-modul så att det finns en exakt svit

(4) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$

där f och g är Λ-homomorfismer, så är E ett slags generaliserad summa av A och B, som kan vara mycket olik 1).

Exempel: $\Lambda = \mathbb{Z}$, $0 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow Z_4 \longrightarrow Z_2 \longrightarrow 0$.

I § 12 kommer vi att behandla problemet att klassifiera alla exakta sviter (4), med A och B fixa.

I den additiva homologiska algebran, tar man ut ett T, som överför direkta summor i dito. Man undersöker sedan hur T transformerar generaliserade summor (exakta sviter). För att man skall få resultat fordras att T är halv-exakt (svarar mot deriverbarhetsvillkor). Man kan då mäta avvikelserna med hjälp av satelliter. Detta problem har ingen motsvarighet i den klassiska differentialkalkylen.

I det icke additiva fallet ordnar man till T en familj additiva funktorer som ovan. Därefter tillämpas den additiva teorien på dessa funktorer (som då måste vara halvexakta, vilket ger ett slags deriverbarhetsvillkor på T).

I det icke additiva fallet kommer således satelliterna att bero på två heltal.

I fortsättningen kommer vi att begränsa oss till det additiva fallet.

§ 6. Ett exempel, som motiverar ett fördjupat studium av den allmänna teorien.

Vi har tidigare sett, att

$$T \begin{cases} A \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} B \\ f \longrightarrow f \otimes_{\Lambda} B \end{cases}$$

(B fix; A, f varierande höger Λ-modul, resp. Λ-homomorfism för höger Λ-moduler.)

är en högerexakt kovariant funktor, och teorien i § 4 kan alltså tillämpas.

Beteckning: $Tor_n^{\Lambda}(A, B) = S_n T(A)$.

(Dessa funktorer kommer närmare att studeras i § 14, där bl. a. förklaringen till beteckningen Tor kommer att ges.)

Man kan också hålla A fix och

$$U \begin{cases} B \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} B \\ g \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} g \end{cases}$$

är då också en högerexakt kovariant funktor, så att $S_n U(B)$ existerar.

Det är klart att

$$S_o U(B) = S_o T(A),$$

men

(5) $$S_n U(B) = S_n T(A), \quad \text{även för } n > 0.$$

För att visa detta skall vi i nästa § införa en metod att beräkna $S_n U$ med s. k. resolutioner. Vi ger också en axiomatisk karakterisering av sviten $(S_n U)$.

Resultatet (5) i föreningen med möjligheten att beräkna satelliter med hjälp av resolutioner, kommer bl. a. att vara väsentligt vid beviset av Hilberts sats om syzygier i § 12.

§ 7. Allmänna egenskaper hos vänstersatelliter till halvexakta kovarianta funktorer.

Proposition 2. Låt T vara en halvexakt kovariant funktor och P en projektiv modul. Då är $S_nT(P) = 0$ för $n \geq 1$.

Bevis. Sviten $0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P \xrightarrow{Id} P \longrightarrow 0$ är maximal exakt på P. Men då är

$$S_1T(P) = \mathrm{Ker}(T(0) \longrightarrow T(P)) = 0, \quad \text{och alltså även}$$

$$S_nT(P) = S_1(S_{n-1}T)(P) = 0, \quad n \geq 1. \quad \text{VSB.}$$

Sats 3. Låt T vara en kovariant halvexakt funktor från Λ-moduler till $\mathbb{Z}$-moduler. Då är $S_nT = 0$, $n \geq 2$.

Bevis. Låt

$$0 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

vara en exakt svit på A med F_o fri. Då är även F_1 fri, eftersom F_1 är en undergrupp till en fri abelsk grupp. Enligt Sats 2, så har vi speciellt exakta sviter

$$S_nT(F_o) \longrightarrow S_nT(A) \longrightarrow S_{n-1}T(F_1), \qquad n \geq 2.$$

Men här är $S_nT(F_o) = S_{n-1}T(F_1) = 0$ enligt proposition 2 $(n-1 \geq 1.)$ och följaktligen är $S_nT(A) = 0$ för $n \geq 2$.

Korollarium. $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ för $n \geq 2$.

Övning. Bevisa universella koefficientformeln för homologigrupper på sid. 57.

Låt nu T gå från Λ-moduler till Λ'-moduler. Vi vill ge villkor på M, som garanterar att $S_iT(M) = 0$, $i \geq n+1$.

Proposition 3. Om det finns en exakt svit

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

där $S_iT(A_k) = 0$ $i \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, så är

$$S_iT(M) = 0, \quad i \geq n+1.$$

Bevis. Vi gör ett induktionsbevis. Påståendet är trivialt om vi har endast ett A_i $(n = 0)$. Antag att det är sant för alla exakta sviter med n st. A_i. Sätt $M' = \mathrm{Im}(A_1 \longrightarrow A_o)$. Vi får då den exakta sviten

$$0 \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \qquad \longrightarrow A_1 \longrightarrow M' \longrightarrow 0$$

med n st. A_i.

Alltså är $S_i T(M') = 0$ för $i \geq n$. Tillämpa nu sats 2 på den exakta sviten

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow A_o \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Vi får speciellt exakta sviter

$$S_k T(A_o) \longrightarrow S_k T(M) \longrightarrow S_{k-1} T(M').$$

Här är $S_k T(A_o) = 0$ för $k \geq 1$ och vi har nyss visat, att $S_{k-1} T(M') = 0$ för $k-1 \geq n$. Härav följer att $S_k T(M) = 0$, $i \geq n+1$. VSB.

Korollarium. Om det finns en exakt svit

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

där P_i är projektiva, så är $S_k T(M) = 0$, $i \geq n+1$.

Definition. Om M har egenskapen i korollariet, så säger vi att M har homologisk dimension $\leq n$. Om ringen Λ är sådan, att varje Λ-modul har homologisk dimension $\leq n$, (fixt tal), så säges Λ ha vänsterglobal dimension $\leq n$. Det är klart vad som menas med att dimensionen är exakt n.

Exempel: Varje $\mathbb{Z}$-modul har homologisk dimension ≤ 1, och modulen Z_2 har homologisk dimension 1. Alltså är den globala dimensionen av Z lika med ett. En kropp har global dimension 0. Vi skall senare se, att $\Lambda = k[x_1, \ldots, x_n]$, polynomringen i n variabler över en kropp k, har dimensionen n.

För allmänna ringar kan man till ett givet M i allmänhet inte finna en exakt svit av projektiva moduler, som börjar med 0 och slutar med M. Däremot gäller:

Sats 4. Varje Λ-modul M kan bäddas in i en (i allmänhet oändlig) exakt svit av projektiva Λ-moduler:

$$(6) \quad \ldots \longrightarrow P_{k+1} \longrightarrow P_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Bevis. Skriv M som en kvot av en projektiv modul P_o. Vi får en exakt svit:

$$0 \longrightarrow K_o \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Upprepa konstruktionen med K_o: Vi får

$$0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow K_o \longrightarrow 0$$

Sätt ihop dessa två sviter:

$$(7) \qquad 0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Här definieras $P_1 \longrightarrow P_o$ som kompositionen av $P_1 \longrightarrow K_o$ och $K_o \longrightarrow P_o$. Sviten (7) blir således exakt, och ytterligare itereringar ger resultatet.

Definition. En svit P_* som den i Sats 4 kallas för en projektiv upplösning av M.

Vi har just sett, att om det finns en projektiv upplösning av M med $P_k = 0$, $k > n$, så är $S_k T(M) = 0$, $k > n$. Vi skall nu visa en mycket allmännare sats, som ger möjlighet att beräkna alla satelliterna av T med hjälp av en godtycklig projektiv upplösning (förutsatt att T är högerexakt). Ur (6) får vi ett komplex

$$P_* = (P_*, d_*) : \ldots \longrightarrow P_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} P_n \xrightarrow{d_n} \ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \longrightarrow 0$$

med $H_o(P_*) = M$ och $H_i(P_*) = 0$, $i > 0$. Applicera nu T på P_*. Vi får ett nytt komplex

$$T(P_*) = (T(P_n), T(d_n)),$$

vars högre homologigrupper i allmänhet är skilda från noll. Låt oss först visa att de beror endast på M, och ej på den projektiva upplösningen av M:

Sats 5. Gruppen $H_n(T(P_*))$, där P_* är en projektiv upplösning av M, beror endast på M, och definierar en additiv halvexakt funktor av M.

<u>Bevis.</u> Låt $f: M \longrightarrow M'$ vara en homomorfism, och låt P_* och P_*' vara två godtyckliga projektiva upplösningar av M resp. M'. Vi vill komplettera

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \longrightarrow & P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & \cdots \longrightarrow & P_o & \xrightarrow{e} & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & & & \big\downarrow f & & \\
\cdots \longrightarrow & P_n' & \xrightarrow{d_n'} & P_{n-1}' & \xrightarrow{d_{n-1}'} & \cdots \longrightarrow & P_o' & \xrightarrow{e'} & M' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

med homomorfismer $f_i: P_i \longrightarrow P_i'$, så att det utvidgade diagrammet är kommutativt. Sådana f_i kan konstrueras induktivt:

Betrakta diagrammet

$$\begin{array}{ccccc}
 & & P_o & & \\
 & & \big\downarrow fe & & \\
P_o' & \xrightarrow{e'} & M' & \longrightarrow & 0 .
\end{array}$$

Eftersom P_o är projektiv, så finns det en avbildning $f_o: P_o \longrightarrow P_o'$ så att

$$e'f_o = f ,$$

Antag nu att vi har konstruerat $f_i: P_i \longrightarrow P_i'$ för $i < n$, så att diagrammet kompletterat med dessa f_i är kommutativt. Det är då lätt att definiera ett lämpligt f_n. Betrakta nämligen:

$$\begin{array}{ccccc}
P_n & \xrightarrow{d_n} & P_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & P_{n-2} \\
 & & \big\downarrow f_{n-1} & & \big\downarrow f_{n-2} \\
P_n' & \xrightarrow[d_n']{} & P_{n-1}' & \xrightarrow[d_{n-1}']{} & P_{n-2}'
\end{array}$$

(Om $n = 1$, så sätter vi $P_{n-2} = M$, $P_{n-2}' = M'$ och definierar avbildningar på motsvarande sätt; allt vi behöver veta för vårt bevis är att P_n är projektiv.)

Sätt $X_{n-1}' = \text{Im } d_n' = \text{Ker } d_{n-1}'$. Eftersom $d_{n-1}' f_{n-1} d_n = f_{n-2} d_{n-1} d_n = 0$, så avbildas P_n av $f_{n-1} d_n$ in i X_{n-1}':

$$\begin{tikzcd} & P_n \arrow[d, "f_{n-1} d_n"] & \\ P_n' \arrow[r, "d_n'"'] & X_{n-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Men P_n är projektiv, så det är lätt att komplettera till ett kommutativt diagram med en homomorfism $P_n \xrightarrow{f_n} P_n'$. Induktionen är således avslutad, och vi får ett stort kommutativt diagram:

$$(8)\quad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[d, "f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_o \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f_o"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & P_n' \arrow[r, "d_n'"'] & P_{n-1}' \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & P_o' \arrow[r, "e'"'] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Om vi applicerar T på detta diagram, så får vi på nytt ett kommutativt diagram, men raderna är ej längre exakta. Av kommutativiteten följer att $(T(f_n))$ inducerar homomorfismer

$$H_n(T(f_*)) : H_n(T(P_*)) \longrightarrow H_n(T(P_*'))$$

Det skall nu visas, att dessa $H_n(T(f_*))$ endast beror på f och ej på det speciella valet av (f_n). Betrakta två familjer (f_n^1) och (f_n^2), så att motsvarande diagram (8) blir kommutativa, och uppskatta skillnaden $f_n^1 - f_n^2$.

Det är klart att $e'(f_o^1 - f_o^2) = f e - f e = 0$, varav följer, att $\mathrm{Im}(f_o^1 - f_o^2) \subset \mathrm{Ker}\, e' = \mathrm{Im}\, d_1'$. Ur diagrammet

$$\begin{tikzcd} & P_o \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "f_o^1 - f_o^2"] & \\ P_1' \arrow[r, "d_1'"'] & \mathrm{Im}\, d_1' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

följer som tidigare (P_o är projektiv), att det finns en avbildning

$$s_o : P_o \longrightarrow P_1'$$

så att $\qquad f_o^1 - f_o^2 = d_1' s_o .$

Nu är $d_1'(\bar{f}_1^1 - \bar{f}_1^2 - \bar{s}_o d_1) = \bar{f}_o^1 d_1 - \bar{f}_o^2 d_1 - d_1' \bar{s}_o d_1 = 0$

(vi kan faktorisera ut d_1). Alltså är

$\operatorname{Im}(\bar{f}_1^1 - \bar{f}_1^2 - \bar{s}_o d_1) \subset \operatorname{Ker} d_1' = \operatorname{Im} d_2'$, och vi kan komplettera

$$\begin{tikzcd}
 & P_1 \arrow[dl, dashed, "s_1"'] \arrow[d, "\bar{f}_1^1 - \bar{f}_1^2 - \bar{s}_o d_1"] & \\
P_2' \arrow[r, "d_2'"'] & \operatorname{Im} d_2' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

med s_1, så att

$$\bar{f}_1^1 - \bar{f}_1^2 = d_2' s_1 + \bar{s}_o d_1 .$$

Detta resonemang kan upprepas, och vi får slutligen homomorfismer

$$s_n : P_n \longrightarrow P_{n+1}' \quad \text{så att}$$

$$\bar{f}_n^1 - \bar{f}_n^2 = d_{n+1}' s_n + \bar{s}_{n-1} d_n , \quad n \geq 0 \qquad (\text{sätt } \bar{s}_{-1} = 0).$$

Applicera nu T. Vi får

$$(9) \qquad T(\bar{f}_n^1) - T(\bar{f}_n^2) = T(d_{n+1}')\, T(s_n) + T(\bar{s}_{n-1})\, T(d_n)$$

och denna formel visar, att $H_n(T(f_*^1)) = H_n(T(f_*^2))$. Antag nämligen att $x \in \operatorname{Ker} T(d_n)$. Då är enligt (9)

$$T(\bar{f}_n^1)(x) - T(\bar{f}_n^2)(x) = T(d_{n+1}')\, T(s_n)(x) \in \operatorname{Im} T(d_{n+1}') .$$

Att $H_n(T(\mathrm{Id}_*)) = \mathrm{Id}$, $H_n(T((fg)_*)) = H_n(T(f_*))\, H_n(T(g_*))$, $H_n(T((f+g)_*)) =$
$= H_n(T(f_*)) + H_n(T(g_*))$ verifieras lätt.

Vi är nu mogna för att visa, att $(H_n(T(P_*))$ endast beror på M. Låt P_* och P_*' vara två projektiva upplösningar av M. Tag $M = M'$ och $f = \mathrm{Id}$ och tillämpa resonemanget ovan.

Det finns således homomorfismer $f_n : P_n \longrightarrow P_n'$ och

$g_n : P_n' \longrightarrow P_n$, $(n \geq 0)$, så att följande diagram är kommutativa

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
P_* & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & & P_*^! & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow (f_n)_{n \geq 0} & & \downarrow \mathrm{Id} & & & & \downarrow (g_*)_{n \geq 0} & & \downarrow \mathrm{Id} & & \\
P_*^! & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & & P_*^! & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

Men då är också diagrammen

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
P_* & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & & P_*^! & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow (f_n g_n)_{n \geq 0} & & \downarrow \mathrm{Id} & & & \text{och} & \downarrow (g_* f_*)_n \geq 0 & & \downarrow \mathrm{id} & & \\
P_* & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & & P_*^! & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}
$$

kommutativa. Applicera T, och tag homologimodulerna. Vi får då

$$H_n(T(f_*))\, H_n(T(g_*)) = \mathrm{Id} \quad \text{och} \quad H_n(T(g_*))\, H_n(T(f_*)) = \mathrm{Id}$$

(Entydigheten och transitiviteten av inducerade avbildningar för homologi moduler.) Sats 5 är nu fullständigt bevisad.

Anm. Vad vi bevisat är egentligen endast, att $H_n(T(P_*))$ är entydigt bestämd sånär som på en entydigt bestämd isomorfism. Situationen var densamma för $S_1T(M)$, och vi fixerade denna grupp, genom att välja en kanonisk maximal svit på M. Man bör egentligen förfara på liknande sätt här.

Sats 5 ger således en funktor

$$M \longrightarrow H_n(T(P_*(M)))$$

$$f \longrightarrow H_n(T(f_*))$$

Den betecknas med L_nT och kallas för n:te vänsterderiverade funktorn av T. Den kan definieras för en godtycklig (ej nödvändigtvis halvexakt) additiv funktor T.

Sats 6. Låt T vara en additiv kovariant funktor. Sviten L_nT av vänsterderiverade funktorer till T har då egenskapen att till varje exakt svit

$$E : 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

så finns det en familj av homomorfismer $L_n T(N) \xrightarrow{\delta_n(E)} L_{n-1} T(L)$ så att

$$\cdots \longrightarrow L_{n+1} T(N) \xrightarrow{\delta_{n+1}(E)} L_n T(L) \xrightarrow{L_n T(f)} L_n T(M) \xrightarrow{L_n T(g)} L_n T(N) \xrightarrow{\delta_n(E)}$$

$$\longrightarrow L_{n-1} T(M) \qquad L_1 T(N) \xrightarrow{\delta_1(E)} L_o T(L) \xrightarrow{L_o T(f)} L_o T(M) \xrightarrow{L_o T(g)}$$

$$\longrightarrow L_o T(N) \longrightarrow 0$$

är exakt. Vidare kan (δ_n) väljas så att de blir naturliga i samma mening som i Sats 2.

<u>Bevis.</u> Vi konstruerar projektiva upplösningar $P_*(L)$, $P_*(M)$ och $P_*(N)$ av L, M och N så att diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_n(L) \arrow[r] \arrow[d] & P_n(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_n(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_{n-1}(L) \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1}(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_{n-1}(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & P_1(L) \arrow[r] \arrow[d] & P_1(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_1(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & P_o(L) \arrow[r] \arrow[d] & P_o(M) \arrow[r] \arrow[d] & P_o(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

blir kommutativt med exakta rader och kolonner. Konstruktionen kan göras som en kombination av konstruktionerna på sid. 71 och sid. 78.

Varje svit

$$0 \longrightarrow P_n(L) \longrightarrow P_n(M) \longrightarrow P_n(N) \longrightarrow 0$$

är splittrad, eftersom de ingående modulerna är projektiva.

Applicera T på (10). Vi får då

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T(P_*(L)) \arrow[r] \arrow[d] & T(P_*(M)) \arrow[r] \arrow[d] & T(P_*(N)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& T(L) \arrow[r] \arrow[d] & T(M) \arrow[r] \arrow[d] & T(N) \arrow[d] & \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

med exakta rader ~~(och kolonner)~~, eftersom sviterna

$$0 \longrightarrow P_*(L) \longrightarrow P_*(M) \longrightarrow P_*(N) \longrightarrow 0$$

är splittrade.

För att komplettera beviset för sats 6, räcker det alltså att visa

<u>Sats 7.</u> Låt

$$E_* : \quad 0 \longrightarrow L_* \xrightarrow{f_*} M_* \xrightarrow{g_*} N_* \longrightarrow 0$$

vara en exakt svit av komplex.

Det finns då (naturliga) avbildningar $\delta_n = \delta_n(E_*) : H_n(N_*) \longrightarrow H_{n-1}(L_*)$

så att sviten

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{n+1}} H_n(L_*) \xrightarrow{H_n(f_*)} H_n(M_*) \xrightarrow{H_n(g_*)} H_n(N_*) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-1}(L_*) \longrightarrow$$

blir exakt.

<u>Bevis.</u> Betrakta diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d^L_{n+1}"] & M_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d^M_{n+1}"] & N_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d^N_{n+1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d^L_n"] & M_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d^M_n"] & N_n \arrow[r] \arrow[d, "d^N_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] & M_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] & N_{n-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

som enligt förutsättningen är kommutativt med exakta rader.

Vi påminner om att

$$Z_n(X_*) = \operatorname{Ker} d_n^X \qquad (X = L, M, N)$$

Enligt lemma 1, får vi en exakt svit

$$0 \longrightarrow Z_n(L_*) \xrightarrow{Z_n(f_*)} Z_n(M_*) \xrightarrow{Z_n(g_*)} Z_n(N_*)$$

Sätt nu

$$Z_n'(X_*) = \operatorname{Coker} d_{n+1}^X = X_n/\operatorname{Im} d_{n+1}^X = X_n/B_n(X_*)$$

Enligt samma lemma får vi en exakt svit

$$Z_n'(L_*) \xrightarrow{Z_n'(f_*)} Z_n'(M_*) \xrightarrow{Z_n'(g_*)} Z_n'(N_*) \longrightarrow 0$$

Betrakta $X_n \xrightarrow{d_n^X} X_{n-1}$. Eftersom X_* är ett komplex, är $\operatorname{Im} d_{n+1}^X \subset \operatorname{Ker} d_n^X$, och d_n^X inducerar en avbildning

$$X_n/\operatorname{Im} d_{n+1}^X \longrightarrow \operatorname{Im} d_n^X \subset \operatorname{Ker} d_{n-1}^X$$

alltså en avbildning

$$Z_n'(X_*) \xrightarrow{\tilde{d}_n^X} \bar{Z}_{n-1}(X_*)$$

Det inses lätt att diagrammet

$$\begin{tikzcd}
 & Z_n'(L_*) \arrow[r, "Z_n'(f_*)"] \arrow[d, "\tilde{d}_n^L"] & Z_n'(M_*) \arrow[r, "Z_n'(g_*)"] \arrow[d, "\tilde{d}_n^M"] & Z_n'(N_*) \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{d}_n^N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bar{Z}_{n-1}(L_*) \arrow[r, "\bar{Z}_{n-1}(f_*)"'] & \bar{Z}_{n-1}(M_*) \arrow[r, "\bar{Z}_{n-1}(g_*)"'] & \bar{Z}_{n-1}(N_*) &
\end{tikzcd}$$

är kommutativt.

Men

$$\operatorname{Ker} \tilde{d}_n^X = \operatorname{Ker}(X_n/\operatorname{Im} d_{n+1}^X \longrightarrow \bar{X}_{n-1}) =$$

$$= \operatorname{Ker}(X_n \longrightarrow \bar{X}_{n-1})/\operatorname{Im} d_{n+1}^X = Z_n(X_*)/B_n(X_*) =$$

$$= H_n(X_*) \quad \text{och}$$

$$\operatorname{Coker} \tilde{d}_n^X = \bar{Z}_{n-1}(X_*)/\operatorname{Im}(X_n/\operatorname{Im} d_{n+1}^X \longrightarrow \bar{X}_{n-1}) =$$

$$= Z_{n-1}(X_*)/\operatorname{Im}(X_n \longrightarrow X_{n-1}) = Z_{n-1}(X_*)/B_{n-1}(X_*) =$$

$$= H_{n-1}(X_*)$$

Vi får alltså en exakt svit

$$\ldots \longrightarrow H_n(L_*) \longrightarrow H_n(M_*) \longrightarrow H_n(N_*) \longrightarrow H_{n-1}(L_*) \longrightarrow H_{n-1}(M_*) \longrightarrow H_{n-1}(N_*)$$

enligt lemma 1. V.S.B.

Proposition 4. Om T är en additiv kovariant funktor och P en projektiv modul, så är $L_nT(P) = 0$, $n \geq 1$.

Bevis. Som projektiv upplösning av P kan vi taga

$$\begin{array}{ccccccccc} & & P_2 & & P_1 & & P_0 & & \\ & & \| & & \| & & \| & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{\text{Id}} & P \longrightarrow 0 \end{array}$$

Det är då klart att $H_n(T(P_*)) = 0$ för $n \geq 1$. VSB.

Proposition 5. Om T är kovariant och högerexakt, så finns det en isomorfism $L_oT(M) \xrightarrow[\sim]{\phi(M)} T(M)$.

Bevis. Låt $\ldots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_o \xrightarrow{e} M \longrightarrow 0$

vara en projektiv upplösning av M. Eftersom T är högerexakt, så följer (bevis ?), att sviten

$$T(P_1) \xrightarrow{T(d_1)} T(P_o) \xrightarrow{T(e)} T(M) \longrightarrow 0$$

är exakt. Härav en isomorfism

$$L_oT(M) = H_o(T(P_*)) = \text{Coker } T(d_1) \xrightarrow{\sim} T(M). \qquad \text{VSB.}$$

De deriverade funktorerna har, som vi sett många egenskaper gemensamma med satelliterna. Vi skall strax visa, att

$$(\|) \qquad L_nT = S_nL_oT$$

Om T är en godtycklig additiv funktor, så är L_oT högerexakt. (Bevisa detta som övning.) Formeln ($\|$) visar således att (L_nT) kan beskrivas som vänstersatelliterna till den högerexakta funktorn L_oT. Om speciellt T är högerexakt, så är

$$L_nT = S_nT.$$

Eftersom satelliterna i viss mening är det primära [de mäter avvikelse för exakthet för T, medan L_nT endast mäter motsvarande avvikelse för L_oT, som kan vara mycket olik T (exempel: $L_o\text{Tor}_k(\cdot, B) = 0$ om $k \geq 1$).], så ser vi att vänsterderiverade funktorer av T är intressanta endast om T är högerexakt. De ger då en god metod för att beräkna S_nT.

Exempel: $\text{Tor}_n^{\wedge}(A, B) = H_n(P_* \otimes_{\wedge} B)$, där P_* är en projektiv upplösning av A.

Som förberedelse till beviset för $(\|)$, studerar vi först en allmännare situation.

Definition. Betrakta en svit av kovarianta funktorer (T_k), $k \in \mathbb{Z}$. Vi säger att den är en sammanhängande svit av funktorer, om följande axiom är uppfyllt:

SF. Till varje exakt svit

$$E: \quad 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

kan vi finna homomorfismer

$$\delta_k(E) : T_k(N) \longrightarrow T_{k-1}(L)$$

så att sviten

$$T_*(E): \ldots \longrightarrow T_{k+1}(M) \xrightarrow{T_{k+1}(g)} T_{k+1}(N) \xrightarrow{T_{k+1}(E)} T_k(L) \xrightarrow{T_k(f)} T_k(M) \longrightarrow \ldots$$

är ett komplex, dvs. kompositionen av två på varandra följande avbildningar är noll. Dessutom fordras, att

$$E \longrightarrow (\delta_k(E))$$

är en "funktor":

Om

$$\begin{array}{lccccccccc} E: & 0 & \longrightarrow & L & \longrightarrow & M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow \ell & & \downarrow & & \downarrow n & & \\ E': & 0 & \longrightarrow & L' & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & N' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

är kommutativt med exakta rader, så är

$$\begin{array}{ccc} T_k(N) & \xrightarrow{\delta_k(E)} & T_{k-1}(L) \\ {\scriptstyle T_k(n)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T_{k-1}(l)} \\ T_k(N') & \xrightarrow[\delta_k(E')]{} & T_{k-1}(L') \end{array}$$

kommutativt (δ är naturlig).

Sviterna $\begin{cases} U_k = S_k T, & k \geq 0, \\ U_k = 0, & k < 0 \\ (T \text{ halvexakt}) & \end{cases}$ och $\begin{cases} V_k = L_k T, & k \geq 0, \\ V_k = 0, & k < 0, \\ (T \text{ additiv}) & \end{cases}$

bildar tydligen exempel på sammanhängande sviter av funktorer.

De uppfyller axiomet

ESF: Axiomet SF är uppfyllt, och dessutom är $T_*(E)$ exakt för varje E, $T_k = 0$ $k < 0$, och $T_k(P) = 0$ $k \geq 1$, P projektiv.

Sats 8. En sammanhängande svit av funktorer, som uppfyller axiomet ESF, är väsentligen entydigt bestämd. Mer precist, låt (T_k) och (U_k) vara två sådana sviter av funktorer, och $T_o \xrightarrow{\phi_o} U_o$ en naturlig transformation av funktorer, dvs. $\phi_o = (\phi_o(M))$ har egenskapen att alla diagram

$$\begin{array}{ccc} T_o(M) & \xrightarrow{\phi_o(M)} & U_o(M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle T_o(f)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle U_o(f)} \\ T_o(M') & \xrightarrow{\phi_o(M')} & U_o(M') \end{array}$$

är kommutativa (M, M', $f: M \longrightarrow M'$, godtyckliga). Den kan då entydigt utvidgas till en familj av naturliga transformationer

$$T_k \xrightarrow{\phi_k} U_k$$

så att

$$\begin{array}{ccc} T_k(N) & \xrightarrow{\delta_k^T(E)} & T_{k-1}(L) \\ \phi_k(N)\Big\downarrow & & \Big\downarrow\phi_{k-1}(L) \\ U_k(N) & \xrightarrow{\delta_k^U(E)} & U_{k-1}(L) \end{array}$$

kommuterar för varje E.

Bevis. Antag, att vi definierat ϕ_i för $i < k$ $(k \geq 1)$, och definiera ϕ_k:
Tag en exakt svit

$$(12) \qquad 0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

med P projektiv. Vi får då ett kommutativt diagram

$$\begin{array}{ccccccc} T_k(P) & \longrightarrow & T_k(M) & \longrightarrow & T_{k-1}(K) & \longrightarrow & T_{k-1}(P) \\ & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{k-1}(K)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{k-1}(P)} \\ U_k(P) & \longrightarrow & U_k(M) & \longrightarrow & U_{k-1}(K) & \longrightarrow & U_{k-1}(P) \end{array}$$

Men enligt ESF är raderna exakta, och $T_k(P) = U_k(P) = 0$. Diagrammet definierar då en homomorfism

$$\phi_k(M) : T_k(M) \longrightarrow U_k(M).$$

Den är oberoende av valet av exakt svit (12), och den har alla önskade egenskaper:

Betrakta ett kommutativt, exakt diagram:

$$(13)\qquad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Applicera T och U på det.

Vi får ett nytt kommutativt diagram (som man bör tänka sig i tre dimensioner)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & T_n(M) \arrow[r] \arrow[d, "T_n(f)"] \arrow[dd, bend right, "\phi_n(M)"'] & T_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\phi_{n-1}(K)"'] & T_{n-1}(P) \arrow[d] \arrow[dd, bend right, "\phi_{n-1}(P)"'] \\ 0 \arrow[r] & T_n(M') \arrow[r] \arrow[dd, bend left, "\phi_n(M')"] & T_{n-1}(K') \arrow[r] \arrow[dd, bend left, "\phi_{n-1}(K')"] & T_{n-1}(P') \arrow[dd, bend left, "\phi_{n-1}(P')"] \\ 0 \arrow[r] & U_n(M) \arrow[r] \arrow[d, "U_n(f)"] & U_{n-1}(K) \arrow[r] \arrow[d] & U_{n-1}(P) \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & U_n(M') \arrow[r] & U_{n-1}(K') \arrow[r] & U_{n-1}(P') \end{tikzcd}$$

där de sneda homomorfismerna fås av ϕ.

Ur detta ser vi att diagrammet

$$\begin{tikzcd} T_n(M) \arrow[r, "T_n(f)"] \arrow[d, "\phi_n(M)"'] & T_n(M') \arrow[d, "\phi_n(M')"] \\ U_n(M) \arrow[r, "U_n(f)"'] & U_n(M') \end{tikzcd}$$

är kommutativt.

Om vi speciellt väljer $M = M'$ och $f = id_M$, ser vi att ϕ_n ej beror av valet av projektiv modul på M.

De övriga önskade egenskaperna hos ϕ_n följer också ur detta diagram.

Vi har alltså bevisat det sista påståendet i sats 8, och detta påstående är mer precist än det första. (Varför?) VSB.

Korollarium. Låt T vara en kovariant, additiv funktor. Det finns då en naturlig isomorfism av funktorer:

$$L_nT \longrightarrow S_nL_o(T).$$

Detta följer ur satsen och det faktum, att isomorfismen i Prop. 5 är naturlig. (Bevis?) Vi kan alltså beräkna satelliter av högerexakta funktorer med hjälp av projektiva upplösningar. Mer precist:

Proposition 6. Låt T vara en högerexakt kovariant funktor, och

$$\ldots \longrightarrow A_n \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow A_1 \longrightarrow A_o \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

en exakt svit, så att $S_i T(A_k) = 0$, $i \geq 1$, $k \geq 0$. Då är

$$S_n T(M) \cong H_n(T(A_*)).$$

Övning: Bevisa detta. (Ledning: Försök att bli inspirerad av beviset för Prop. 3.)

Som en tillämpning av Sats 8, bevisar vi slutligen det i § 6 utlovade resultatet om Tor.

Sats 9. Betrakta funktorerna $T: A \longrightarrow A \otimes_\wedge B$ och $U: B \longrightarrow A \otimes_\wedge B$. Det finns då en isomorfism $S_n T(A) \longrightarrow S_n U(B)$.

Bevis. Låt P_* vara en fix projektiv upplösning av A. Då är $S_n T(A) = H_n(P_* \otimes_\wedge B)$. Sätt $V_n(B) = H_n(P_* \otimes_\wedge B)$. En exakt svit

$$0 \longrightarrow B_1 \longrightarrow B_2 \longrightarrow B_3 \longrightarrow 0$$

ger en exakt svit av komplex

$$0 \longrightarrow P_* \otimes_\wedge B_1 \longrightarrow P_* \otimes_\wedge B_2 \longrightarrow P_* \otimes_\wedge B_3 \longrightarrow 0$$

och följaktligen en lång exakt svit av homologigrupperna $V_n(B)$. Dessutom är $V_n(P) = 0$, $n \geq 1$, om P är projektiv, ty

$$\ldots \longrightarrow P_k \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_o \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

är exakt, och alltså även

$$\ldots \longrightarrow P_k \otimes_\wedge P \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_1 \otimes_\wedge P \longrightarrow P_o \otimes_\wedge P \longrightarrow A \otimes_\wedge P \longrightarrow 0$$

(P projektiv). Alltså bildar (V_n) och $(S_n U)$ sammanhängande sviter av funktorer, som satisfierar ESF och sammanfaller för $n = 0$.

Härav $\quad \mathrm{Tor}_n^\wedge(A, B) = S_n T(A) \simeq S_n U(B)$. $\quad$ VSB.

§ 8. Högersatelliter av kovarianta funktorer I.

Låt T vara en allmän kovariant halvexakt funktor, och

$$E : 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

en exakt svit. Då är

$$\ldots \longrightarrow S_n T(N) \longrightarrow S_{n-1} T(L) \longrightarrow \ldots \longrightarrow S_1 T(N) \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N)$$

en exakt svit, som mäter T:s avvikelse från vänsterexakthet.

Analogt kan man konstruera en exakt svit åt höger:

$$\ldots \longrightarrow T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \xrightarrow{T(g)} T(N) \longrightarrow S^1 T(L) \longrightarrow \ldots \longrightarrow S^{n-1} T(M) \longrightarrow S^n T(L) \longrightarrow \ldots$$

där $S^i T$ är halvexakta funktorer; högersatelliter av T.

Vi går inte in i detalj på denna konstruktion, utan påpekar endast, att $S^1 T(L)$ erhålles på följande sätt:

Betrakta exakta sviter E, som börjar med L, och sätt

$$G(E) = \text{Coker } T(g).$$

Om $E > E'$ är två sådana sviter, så induceras en entydigt bestämd avbildning $G(E) \longrightarrow G(E')$, och man visar, att den är injektiv.

För att maximera $G(E')$, bör vi alltså uppsöka en minimal svit E'. Sådana sviter är t.ex. de med en injektiv modul i mitten (se kapitel 1):

$$E_{min,\,L} : 0 \longrightarrow L \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

I nästa paragraf visas, att varje L kan inbäddas i en injektiv modul.

Definitionen

$$S^1 T(L) = G(E_{min,\,L})$$

har således en mening, och teorien går igenom som förut. (Se även § 10.)

§ 9. Teori för injektiva moduler.

Vi påminner om att en Λ-modul I kallas injektiv, om varje exakt diagram

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & M \arrow[dl, dashed] \\ & I & \end{tikzcd} \tag{13}$$

kan kompletteras med en homomorfism $\varphi : M \longrightarrow I$, så att $\varphi i = k$.

Proposition 7. För att I skall vara injektiv, räcker det att φ existerar i varje diagram (13), där $M = \Lambda$ och $L = \mathfrak{a}$ = ett vänsterideal i Λ.

Bevis. Betrakta ett allmänt diagram (13) (där vi identifierar L med en undermodul till M), och låt oss visa, att det kan kompletteras om I har egenskapen i propositionen. Låt S vara mängden av alla par (g, N), där N är en Λ-modul och $g : N \longrightarrow I$ en Λ-homomorfism så att

$$M \supset N \supset L$$

och $g | L = k$.

På S införes en ordningsrelation genom

$$(g'', N'') > (g', N') \quad \text{om} \quad N'' \supset N' \quad \text{och} \quad g'' | N' = g' .$$

Man inser lätt, att S är induktiv, och Zorns lemma ger alltså existensen av ett maximalt element $(\tilde{g}, \tilde{N})$. Vi påstår, att $\tilde{N} = M$. Tag annars ett m i M, som ej tillhör $\tilde{N}$, och betrakta

$$\mathfrak{a} = \{\lambda \mid \lambda m \in \tilde{N}\}$$

Detta är ett ideal i Λ. Homomorfismen $\mathfrak{a} \ni \lambda \longrightarrow \tilde{g}(\lambda m) \in I$ kan alltså utvidgas till $\Lambda \xrightarrow{\varphi} I$, med vars hjälp man konstruerar en homomorfism $\tilde{g}^*$:

$$\tilde{N} + \Lambda m \ni \overset{n + \lambda m}{\cancel{(n, \lambda m)}} \longrightarrow g(n) + \varphi(\lambda) \in I$$

Paret $(\tilde{g}^*, \tilde{N} + \Lambda m)$ tillhör S och är strikt större än $(\tilde{g}, \tilde{N})$, vilket ger den önskade motsägelsen.

Sats 10. Låt Λ vara en principalring (integritetsområde där varje ideal är av formen $\lambda\Lambda$). En Λ-modul M är injektiv, då och endast då det till varje $m \in M$ och $0 \neq \lambda \in \Lambda$ finns ett $m' \in M$, så att $m = \lambda\, m'$. (I allmänhet kallas en sådan Λ-modul för en divisibel modul.)

Bevis. Övning.

Exempel. $\mathbb{Z}$ är en principalring. (Divisionsalgoritmen.)

$\mathbb{Z}$ är ej divisibel, men $\mathbb{R}$ och $\mathbb{Q}$ är det (kroppar). Alltså är de injektiva, och det är då även fallet med $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ och $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (en kvot av en divisibel modul är divisibel).

Det är lätt att se, att

$$\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \coprod_{p \text{ primtal}} \mathbb{Z}_{p^\infty}, \quad \text{där } \mathbb{Z}_{p^\infty} \text{ är de moduler, som omtalas}$$

i kap. 1, p. 19. De är injektiva, ty varje direkt summand av injektiv modul är injektiv. (Bevis?) Man kan visa, att varje injektiv $\mathbb{Z}$-modul är direkt summa av lämpligt antal av de indekomposabla grupperna $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. Motsvarande sats gäller i mycket allmännare fall (Matlis, Gabriel).

Låt nu Λ vara en godtycklig ring.

Sats 11. Varje Λ-modul kan inbäddas i en injektiv Λ-modul.

Bevis. Satsen är klar för cykliska Z-moduler, för en sådan modul kan inbäddas i $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, som är injektiv. Vi använder nu ett dualitetsresonemang för att återföra Sats 11 på motsvarande sats för projektiva moduler.

Låt L vara en (vänster) Λ-modul. Då är

$$\hat{L} = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

en höger Λ-modul, och $\hat{\hat{L}}$ ånyo en vänster Λ-modul. Vi har en kanonisk Λ-homomorfism

$$j : L \ni \ell \longrightarrow (\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \ni f \longrightarrow f(\ell) \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \in \hat{\hat{L}}$$

och j är injektiv. Ty om $L \ni l \neq 0$ så finns det en cyklisk undergrupp $\mathbb{Z}l$ till L, som innehåller l, alltså en injektion $\mathbb{Z}l \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, som kan utvidgas till L, eftersom $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ är Z-injektiv.

Skriv nu $\hat{L}$ som en kvot av en projektiv modul P:

$$P \longrightarrow \hat{L} \longrightarrow 0$$

Då är $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\hat{L}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ exakt, och $L \subset \hat{\hat{L}}$ kan alltså inbäddas i $\hat{P}$. Sats 11 följer nu av följande

Lemma 2. Om P är en projektiv höger Λ-modul, så är $\hat{P}$ en injektiv vänster Λ-modul.

Bevis. Det gäller att visa, att $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\cdot, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}/\mathbb{Z}))$ är en exakt funktor på kategorien av (vänster) Λ-moduler. Men enligt definitionen av tensorprodukt, så är

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda}(\cdot, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{R}/\mathbb{Z})) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P \otimes_{\Lambda} \cdot, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

Men $P \otimes \cdot$ är exakt, eftersom P är höger Λ-projektiv. Då är även $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(P \otimes_{\Lambda} \cdot, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ exakt ($\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ är $\mathbb{Z}$-injektiv). VSB.

Vi ser att beviset för sats 11 är mycket svårare än beviset för motsvarande resultat om projektiva moduler. Detta beror på att "kategorien av Λ-moduler ej är självdual". (Se kapitel 6.)

§ 10. Högersatelliter av kovarianta funktorer II. Huvudsatsen för kovarianta halvexakta funktorer.

Diskussionen i § 8 kan nu fortsättas.

Allt blir analogt med vänsterfallet, och vi påpekar endast några resultat:

$$S^n T(I) = 0, \quad n \geq 1, \quad I \text{ injektiv.}$$

Om T är vänsterexakt, så kan satelliterna $S^n T(M)$ beräknas med hjälp av en injektiv upplösning av M:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I^0 \longrightarrow I^1 \longrightarrow I^2 \longrightarrow I^3 \longrightarrow \cdots$$

$$S^n T(M) = H^n(T(I^*)).$$

I allmänna fallet kallas $R^n T(M) = H^n(T(I^*))$ för högerderivatorna av T.

Låt oss endast bevisa

Proposition 8. Om T är en halvexakt funktor från $\mathbb{Z}$-moduler till Λ'-moduler, så är $S^n T = 0$, $n \geq 2$.

Bevis: Det finns en exakt svit

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

med I $\mathbb{Z}$-injektiv. Men här är även N injektiv, ty den är kvot av en divisibel modul, alltså själv divisibel, och således injektiv eftersom $\mathbb{Z}$ är en principalring. Vi har exakta sviter

$$S^k T(N) \longrightarrow S^{k+1} T(M) \longrightarrow S^{k+1} T(I).$$

Yttertermerna är noll om $k \geq 1$. Härav $S^n T = 0$ $n \geq 2$. VSB.

Exempel. $T: L \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, L)$ är en kovariant vänsterexakt funktor. Vi inför beteckningen

$$\mathrm{Ext}^n_\Lambda(M, L) = S^n T(L) = R^n T(L)$$

som senare kommer att förklaras (§ 12), och som dessutom är förenlig med beteckningen Ext^1_Λ i kapitel 1. Speciellt är $\mathrm{Ext}^n_Z(M, L) = 0$, $n \geq 2$.

Vi sammanfattar slutligen våra resultat om halvexakta kovarianta funktorer:

Sats 12. Låt T vara en halvexakt kovariant funktor. Man kan då införa en familj halvexakta kovarianta funktorer $(S_n T)_{n \in \mathbb{Z}}$ (vi sätter $S_{-n} = S^n$, $n > 0$), som har följande egenskaper:

1) $S_0 T = T$; $S_n T(P) = 0$, $n \geq 1$, P projektiv; $S_n T(I) = 0$, $n \leq -1$, I injektiv.

2) Till varje exakt svit $E: 0 \longrightarrow L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$, så finns det en familj av (naturliga) homomorfismer $\delta_n(E): S_n T(N) \longrightarrow S_{n-1} T(L)$ så att sviten

$$\cdots S_{n+1} T(N) \xrightarrow{\delta_{n+1}(E)} S_n T(L) \xrightarrow{S_n T(f)} S_n T(M) \xrightarrow{S_n T(g)} \cdots \longrightarrow S_1 T(N) \xrightarrow{\delta_1(E)} T(L) \xrightarrow{T(f)} T(M) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{T(g)} T(N) \xrightarrow{\delta_{-1}(E)} S_{-1} T(L) \xrightarrow{S_{-1} T(f)} S_{-1} T(M) \longrightarrow \cdots \longrightarrow S_{-n} T(N) \longrightarrow \cdots$$

blir exakt. Egenskaperna 1) och 2) fastlägger sviten $(S_n T)_{n\in\mathbb{Z}}$ entydigt.

§ 11. Kontravarianta halvexakta funktorer.

Det kontravarianta fallet behandlas på exakt samma sätt, som det kovarianta: "Man vänder på pilarna i alla diagram". Det överlämnas åt läsaren att göra denna helomvändning, att speciellt studera funktorn

$$U: M \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(M, L),$$ och att visa följande

Sats 13. Det finns en isomorfism

$$S^n U(M) = R^n U(M) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^n_\Lambda(M, L).$$

(Ledning: Betrakta motsvarande bevis för $\mathrm{Tor}^\Lambda_n(A, B)$ i § 7.)

Resten av kapitel 3 ägnas åt "konkreta tillämpningar", och åt ett studium av speciella funktorer.

§ 12. Hilberts sats om syzygiekedjor och dess generaliseringar.

Med hjälp av homologiska metoder skall vi nu bevisa en klassisk sats av Hilbert om moduler över en polynomring. [D. Hilbert, Ueber die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen 36, 1890, p. 473-534]. Den homologiska formuleringen härstammar från H. Cartan, Extensions du théorème des "chaines de syzygies", Rend. di Mat. 11, 1952, p. 156-166. Cartans artikel är emellertid inspirerad av tidigare arbeten av J. L. Koszul.

Låt K vara en kropp, och $K[x_1, \ldots, x_n]$ polynomringen i n variabler över K. Denna ring är ett exempel på en graduerad ring:

Definition. En ring Λ kallas för en graduerad ring, om Λ är försedd med en uppspaltning i en direkt summa av undergrupper

$$\Lambda = \coprod_{i \geq 0} \Lambda^i$$

så att $\Lambda^i \cdot \Lambda^j \subset \Lambda^{i+j}$ ($\cdot$ = multiplikation i Λ).

(Övning: Visa att enhetselementet i Λ ligger i Λ^o och att Λ^o är en underring till Λ.)

Exempel: $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]$, Λ^i = alla homogena polynom av grad i.

Definition. En graderad Λ-modul är detsamma som en Λ-modul M, försedd med en uppspaltning i en direkt summa av undergrupper

$$M = \coprod_{i \geq 0} M^i$$

så att $\Lambda^i \cdot M^k \subset M^{i+k}$.

Övning: Låt M vara en graduerad Λ-modul. Visa, att varje M^i är en Λ^o-modul.

Definition. Om M och N är två graduerade Λ-moduler, och f en Λ-homomorfism $M \longrightarrow N$ sådan att $f(M^i) \subset N^{i+k}$ för alla i (k fix), så kallas f för en homomorfism av graden k (mellan graduerade moduler).

Bildningen

$$\mathcal{GM}_\Lambda = \left\{\begin{array}{l}\text{"Alla" graduerade } \Lambda\text{-moduler,} \\ \text{alla homomorfismer av graden } 0 \\ \text{mellan graderade } \Lambda\text{-moduler.}\end{array}\right\} \quad (\Lambda \text{ fix graduerad ring.})$$

är analog med

$$\mathcal{M}_{\Lambda'} = \left\{\begin{array}{l}\text{"Alla" } \Lambda'\text{-moduler,} \\ \text{alla homomorfismer mellan } \Lambda'\text{-moduler.}\end{array}\right\} \quad (\Lambda' \text{ fix ring})$$

och det är lätt att se, att alla tidigare resonemang för $\mathcal{M}_\Lambda$, också går igenom för $\mathcal{GM}_\Lambda$. Man kan alltså tala om graduerade undermoduler, graduerade kvotmoduler, de graduerade modulerna $\mathrm{Ker}\,\varphi$, $\mathrm{Coker}\,\varphi$, $\mathrm{Im}\,\varphi$ då φ är en homomorfism i $\mathcal{GM}_\Lambda$, exakta sviter av graduerade moduler, projektiva graduerade moduler, funktorer från $\mathcal{GM}_\Lambda$ till $\mathcal{M}_{\Lambda'}$, etc. Begreppet fri Λ-modul är nu följande:

$M = \coprod_{i \geq 0} M^i$ är fri om det finns en familj $\{m_s\}$, där $m_s \in M^{\alpha_s}$ så att varje $m \in M$ entydigt kan skrivas $m = \Sigma\,\lambda_s m_s$, $\lambda_s \in \Lambda$.

Om $m \in M^k$, så ligger motsvarande λ_s i $M^{k-\alpha_s}$ (Bevis?). En fri modul är projektiv, och varje modul kan skrivas som en kvot av en fri, alltså projektiv modul.

Vi kan alltså införa vänstersatelliter av halvexakta kovarianta funktorer, speciellt av den högerexakta funktorn

$$M \longrightarrow M \otimes_\Lambda N$$

där M och N är graduerade Λ-moduler, och tensorprodukten tages i vanlig mening (man "glömmer" den graduerade strukturen). Satelliterna betecknas som tidigare men $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(M, N)$. (De sammanfaller i själva verket med $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(M, N)$ tagna i vanlig mening.)

Från och med nu betraktas endast fallet $\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]$, men många av de följande påståendena är sanna i allmännare fall.

En graduerad undermodul till Λ är då det som Hilbert kallade ett homogent polynomideal. Låt nu M vara en godtycklig graduerad Λ-modul och välj en familj $(m_i)_{i\in I}$ av element i M, som Λ-genererar M, och är sådan att varje m_i är homogent, dvs. tillhör något M^k. Betrakta alla relationer

$$\sum_{i\in I} \lambda_i m_i = 0 .$$

Dessa relationer kan adderas och de kan multipliceras med element i Λ och de bildar alltså Λ-modul, som kan graderas på väsentligen ett sätt (Hur?).

I modernt språk, låt F_o vara den fria graduerade Λ-modulen genererad av familjen (m_i). Det finns då en naturlig epimorfism för graduerade Λ-moduler:

$$F_o \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

definierad av $\varphi(\Sigma\lambda_i[m_i]) = \Sigma\lambda_i m_i$.

Ker φ är då isomorf med modulen av relationer ovan. Denna modul kallas för en <u>första syzygiemodul</u> av M, och den betecknas med $M(1)$. Vi har alltså fått en exakt svit i $\mathcal{GM}_\Lambda$:

$$0 \longrightarrow M(1) \longrightarrow F_o \longrightarrow M \longrightarrow 0 .$$

Upprepa nu samma resonemang med $M(1)$ osv. ....

Vi får exakta sviter:

$$(14) \quad 0 \longrightarrow M(k+1) \longrightarrow F_k \longrightarrow M(k) \longrightarrow 0, \quad k \geq 0, \quad (M(0) = M.)$$

Sviten $M(1), M(2), \ldots, M(k), \ldots$ kallas för en <u>syzygiekedja till M.</u>

<u>Sats 14.</u> (Hilbert). I en syzygiekedja till en graduerad modul M över polynomringen i n variabler, gäller att $M(n)$ är fri, dvs. vi kan välja $M(i) = 0$ för $i > n$.

Som förberedelse till beviset, så formulerar vi om satsen i homologiskt språk: Sviterna (14) kan för $k \leq n$ sammansättas till en lång exakt svit

$$0 \longrightarrow M(n) \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow F_{n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_o \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

där alla F_i är fria.

Sats 14 är då självklart ekvivalent med:

$(H)_M$: Om vi har en exakt svit i

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow F_{n-2} \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_o \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

med alla F_i fria, så är N också fri.

Kroppen K kan betraktas som en graduerad Λ-modul, för $K = \Lambda/I$, där I är det homogena idealet av polynom utan konstantterm.

Vi kan alltså bilda $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, K)$.

Proposition 9. Följande påståenden är ekvivalenta för en graduerad Λ-modul M:

a) $(H)_M$, b) $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, K) = 0$, $i \geq n+1$, c) $\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M, K) = 0$

Bevis: Det är klart att

$$(H)_M \Rightarrow \mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, K) = 0, \; i \geq n+1$$

för $(H)_M$ ger just en fri upplösning F_{*} av M med $F_i = 0$ $i > n$, och $\mathrm{Tor}_i^{\Lambda}(M, K) = H_i(F_{*} \otimes_{\Lambda} K)$.

Låt nu $M(1), \dots, M(n)$ vara en syzygiekedja till M, och

$$0 \longrightarrow M(1) \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow M(2) \longrightarrow F_1 \longrightarrow M(1) \longrightarrow 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$0 \longrightarrow M(n) \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow M(n-1) \longrightarrow 0$$

motsvarande exakta sviter. Den första sviten ger en lång exakt svit för Tor

$$\dots \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(F_o, K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M, K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(M(1), K) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(F_o, K) \longrightarrow \dots.$$

Men $n \geq 1$, alltså

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(F_o, K) = 0 \text{ och } \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(F_o, K) = 0,$$

så att

$$\mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M, K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(M(1), K).$$

Samma resonemang tillämpat på den näst sista sviten ger

$$\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(M(1), K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Tor}_{n-1}^{\Lambda}(M(2), K)$$

osv. Slutresultatet blir

$$(15) \qquad \mathrm{Tor}_{n+1}^{\Lambda}(M, K) = \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(M(n), K) .$$

För att fullborda beviset för propositionen räcker det att visa, att villkoret c) medför a). Men enligt formel (15) så medför c) att $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(M(n), K) = 0$. Men:

Lemma 3. Om $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(N, K) = 0$, så är N fri.

Bevis: Låt (n_i) Λ-generera N. Då gäller att $n_i \otimes_{\Lambda} 1$ K-genererar K-modulen $N \otimes_{\Lambda} K$ ty $n_i \lambda \otimes_{\Lambda} 1 = n_i \otimes_{\Lambda} \overline{\lambda}$, där $\overline{\lambda}$ är klassen av λ i $K = \Lambda/I$. Tag ut en delmängd $J \subset I$ så att $(n_j \otimes 1)_{j \in J}$ bildar en K-bas för $N \otimes_{\Lambda} K$. Vi påstår att $\mathfrak{n} = (n_j)_{j \in J}$ bildar en Λ-bas för N:

1) $\mathfrak{n}$ genererar N. Låt nämligen $\overline{N}$ vara den undermodul till N, som Λ-genereras av $\mathfrak{n}$. Vi får en exakt svit

$$0 \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow N \longrightarrow N/\overline{N} \longrightarrow 0 .$$

Applicera den högerexakta funktorn $\cdot \otimes_{\Lambda} K$. Vi får den exakta sviten

$$\overline{N} \otimes_{\Lambda} K \xrightarrow{\varphi} N \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow (N/\overline{N}) \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow 0 .$$

Men φ är en isomorfism ($\{n_j \otimes_{\Lambda} 1\}$ K-bas för $N \otimes_{\Lambda} K$). Alltså $(N/\overline{N}) \otimes_{\Lambda} K = 0$. Men då är $N/\overline{N} = 0$ (bevisas i Lemma 4 nedan), så att $N = \overline{N}$.

2) $\mathfrak{n}$ är en fri familj. Låt F vara den fria (graduerade) Λ-modul, som genereras av $\mathfrak{n}$. Vi har en kanonisk epimorfism $F \longrightarrow N$, som ger upphov till en exakt svit i $\mathcal{GM}_{\Lambda}$:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow F \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

och alltså en exakt svit

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(N, K) \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow F \otimes_{\Lambda} K \xrightarrow{\psi} N \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow 0$$

Men $\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(N, K) = 0$ enligt förutsättningen, vidare är ψ en isomorfism (Bevis?). Alltså är $A \otimes_{\Lambda} K = 0$ så att $A = 0$ enligt det tidigare citerade (och obevisade) lemmat. Alltså är $N = F$ fri och Lemma 3, och därmed även proposition 9, är bevisad modulo:

Lemma 4. Om $A \otimes_{\Lambda} K = 0$, så är $A = 0$.

Bevis: Vi har en exakt svit

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \Lambda \longrightarrow K \longrightarrow 0 ,$$

vilken ger en ny exakt svit:

$$A \otimes_{\Lambda} I \longrightarrow \underset{\overset{\|}{A}}{A \otimes_{\Lambda} \Lambda} \longrightarrow A \otimes_{\Lambda} K \longrightarrow 0$$

Men $A \otimes_{\Lambda} K = 0$, och $A \otimes_{\Lambda} I \longrightarrow A$ är således surjektiv, varav följer att varje $a \in A$ kan skrivas i formen $a = \Sigma a_i \lambda_i$, $\lambda_i \in I$. Men då är $A = 0$, för antag motsatsen! Eftersom $A = \coprod A^i$ så finns då ett minsta i_o så att $A_{i_o} \neq 0$. Tag ett element $a_o \neq 0$ i A_{i_o}. Det kan skrivas

$$a_o = \Sigma a_{(i)} \lambda_i, \quad \lambda_i \in I \quad \text{med homogena } a_{(i)} \text{ av grad } \geq i_o,$$

och λ_i av grad ≥ 1. Men produkterna måste då ha grad $\geq i_o + 1$, och summan måste tillhöra $\coprod_{i \geq i_o+1} A_i$ vilket ger den önskade motsägelsen. VSB.

För att nu bevisa Hilberts sats (Sats 14), så räcker det tydligen att visa något av de ekvivalenta påståendena i proposition 9, t.ex. b). Här har Tor definierats utgående från funktorn $\cdot \otimes_{\Lambda} K$, men vi kunde också utgått från $M \otimes_{\Lambda} \cdot$ (Sats 9.) Det räcker således att konstruera en exakt svit i $\mathcal{GM}_{\Lambda}$:

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow F_{n-1} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_o \longrightarrow K \longrightarrow 0,$$

där F_i är fria. (Detta ger en eliminering av M i problemet.)

Men det är enkelt att explicit konstruera en sådan svit:

Låt F_k vara den fria graduerade Λ-modulen som genereras av alla symboler

$$[y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}] \quad \text{(som tilldelas graden } k)$$

där $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots < n_k \leq n$. (Antalet sådana symboler är f. ö.

$\binom{n}{k}$, $0 \leq k \leq n$)

Definiera $\mathcal{G}\mathcal{M}_\Lambda$-homomorfismer

$$F_k \xrightarrow{d_k} F_{k-1}, \quad n \geq k \geq 0;$$

genom

$$d_k[y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}] = \sum_{j=1}^{k} (-1)^j d_{n_j} [y_{n_1}, \ldots, \hat{y}_{n_j}, \ldots, y_{n_k}], \quad k \geq 1$$

(där den sista klammerparentesen är en förkortning för

$$[y_{n_1}, \ldots, y_{n_{j-1}}, y_{n_{j+1}}, \ldots, y_{n_k}]), \text{ och}$$

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{d_0} & \Lambda/I \\ \| & & \| \\ F_0 & & K \end{array}$$

Man visar lätt (jfr Sats 1, sid. 39) att

$$d_{k-1} d_k = 0, \quad k \geq 1,$$

så att

$$(16) \quad \ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{d_n} \ldots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \xrightarrow{d_0} K \longrightarrow 0$$

är ett Λ -komplex. I själva verket är (16) en exakt svit:

Mer precist, så finns det homomorfismer (för abelska grupper)

$F_k \xrightarrow{S_k} F_{k+1}$, $k \geq -1$ $(F_{-1} = K))$ så att

$$(17) \qquad d_{k+1} S_k + S_{k-1} d_k = \mathrm{Id}.$$

Homomorfismerna S_* konstrueras på följande sätt:

Gruppen F_k, $k \geq 0$, genereras som $\mathbb{Z}$-modul av elementen

$\lambda[y_{n_1}, \ldots, y_{n_k}]$, $(\lambda \in \Lambda)$. Man kan skriva λ entydigt i formen

$$\lambda = \lambda_{(o)} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_{(i)} x_i, \quad \text{där } \lambda_{(i)} \in K[x_1, \ldots, x_i] \text{ .}$$

<u>Definition:</u> $S_k(\lambda[y_{n_1},\ldots,y_{n_k}]) = \sum_{n_k<i\leq n} (-1)^k \lambda_{(i)}[y_{n_1},\ldots,y_{n_k},y_i]$, $(k\geq 0)$.

$S_{-1}: K \longrightarrow F_o$ definieras av den kanoniska dekompositionen $F_o = \Lambda = K + I$

Det överlämnas åt läsaren att verifiera relationerna (17), vilka medför att (16) är exakt (jfr sid. 81).

Härmed är Sats 14 fullständigt bevisad.

På motsvarande sätt kan man visa en syzygiesats för allmänna (ej nödvändigtvis graduerade) moduler över ringarna

$$K[[x_1,\ldots,x_n]]$$

(formella potensserier i n variabler)

och

$$\mathbb{C}\{x_1,\ldots,x_n\}$$

(konvergenta potensserier i n variabler) .

För allmänna moduler över polynomringen

$\Lambda = K[x_1,\ldots,x_n]$ (nu endast betraktad som vanlig ring)

är det hela mer komplicerat:

Man kan visa följande:

Om

$$P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2} \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

är en exakt svit av projektiva Λ-moduler, så är $\mathrm{Ker}(P_{n-1} \longrightarrow P_{n-2})$ <u>projektiv</u> (Λ har global dimension n). Däremot är det ej säkert att denna Λ-modul är fri (ej ens om alla P_i är det).

<u>J. P. Serre</u> har ställt följande problem (Ann. Math. , 61, 1955, p. 197-278 och Sém. Dubreil-Pisot, 1957-58, Exposé 23).

Är varje projektiv modul över polynomringen $K[x_1,\ldots,x_n]$ fri? Detta är sant för $n = 1$ (trivialt, för $k[x_1]$ är en principal ring). För $n = 2$ är det också sant (Seshadri, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 44, 1958 och Proc. Amer. Math. Soc. 10, 1959, p. 670-673). Man vet ej mycket för $n\geq 3$, men Serre har visat, att om hans problem har en positiv lösning för $n\geq 3$, så gäller en mängd rätt osannolika satser om lokal representation av algebraiska mångfalder, som intersektion av algebraiska hyperytor. (Sém. Dubreil-Pisot, 1960-61, Exposé 2.)

§ 13. Studium av funktorn Ext^n.

I § 5 berörde vi problemet att "klassifiera" alla exakta sviter av Λ-moduler:

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0,$$

där A och B är givna fixa Λ-moduler.

Om Λ = kropp, så blir detta problem rätt enkelt:

Välj en bas $\{e_\alpha\}$ för B. Då är $\{f(e_\alpha)\}$ en bas för $f(B) \subset E$ och den kan utvidgas till en bas för E. Härav följer lätt, att $A \amalg B \xrightarrow{\sim} E$ varvid isomorfismen φ kan väljas så att diagrammet

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "{(0, \mathrm{Id})}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & A \amalg B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] & E \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

blir kommutativt. Låt nu Λ vara en allmän ring, och A och B två fixa Λ-moduler.

<u>Definition:</u> En exakt svit

$$\mathbb{E} \; : \; 0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

kallas för en extension av A med B. Två sådana extensioner $\mathbb{E}$ och $\mathbb{E}'$ säges vara ekvivalenta, om det finns en homomorfism $E \xrightarrow{\varphi} E'$ så att diagrammet

$$(18) \quad \begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\varphi"] & A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "f'"] & E' \arrow[r, "g'"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

blir kommutativt.

<u>Anm.</u> Vi har här verkligen att göra med en ekvivalensrelation. Att relationen är reflexiv och transitiv ~~symmetrisk~~ är klart, men den är också symmetrisk ~~transitiv~~, ty

φ är en isomorfism. Detta följer av Lemma 1 tillämpat på diagrammet (18):

Sviterna $\quad \operatorname{Ker} Id_B \longrightarrow \operatorname{Ker} \varphi \longrightarrow \operatorname{Ker} Id_A$ och

$$\operatorname{Coker} Id_B \longrightarrow \operatorname{Coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{Coker} Id_A$$

är exakta, så att $\operatorname{Ker} \varphi = \operatorname{Coker} \varphi = 0$; dvs. φ är en isomorfism.

Problem. Låt $B(A, B)$ vara mängden av ekvivalensklasser av extensioner av A med B. Bestäm strukturen av $B(A, B)$.

Ett exempel på en extension av A med B är tydligen den triviala (splittrade) extensionen:

$$① : 0 \longrightarrow B \longrightarrow A \amalg B \longrightarrow A \longrightarrow 0 .$$

Baer definierade en multiplikation på $B(A, B)$ för vilken ekvivalensklassen av ① blev enhetselement.

Låt oss först visa, att $B(A, B)$ är en "funktor", kontravariant i A och kovariant i B. Låt $\xi \in B(A, B)$ vara representerat av den exakta sviten

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

och låt $A' \xrightarrow{\theta} A$ vara en homomorfism.

Betrakta diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\xi' : 0 \arrow[r] & B \arrow[r, dashed] \arrow[d, "Id"] & E' \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r] & E \arrow[r, "g"] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Vi vill komplettera med ett E' så att vi får ett kommutativt diagram med exakta rader. Detta är möjligt: Sätt $E' = \{(e, a') \mid g(e) = \theta(a')\} \subset E \amalg A'$ och definiera de streckade avbildningarna på naturligt sätt.

Extensionen ξ' definierar ett element $\theta^*(\xi)$ i $B(A', B)$. Det är faktiskt oberoende av representantvalet för ξ. Avbildningen $B(A, B) \xrightarrow{\theta^*} B(A', B)$ är funktoriell (precisera). På motsvarande sätt inducerar $B \xrightarrow{\eta} B'$ en avbildning $B(A, B) \xrightarrow{\eta_*} B(A, B')$. Låt nu ξ, ξ' vara element i $B(A, B)$ och

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} A \longrightarrow 0$$

representanter.

Då definierar $0 \longrightarrow A \amalg A \xrightarrow{f \amalg f'} E \amalg E' \xrightarrow{g \amalg g'} B \amalg B \longrightarrow 0$ ett element i $B(A \amalg A, B \amalg B)$, som betecknas med $\xi \times \xi'$ ty det är oberoende av valet av representant för ξ resp. ξ' (Bevis ?). Avbildningarna

$$B \amalg B \xrightarrow{m} B((b_1, b_2) \longrightarrow b_1 + b_2) \text{ och } A \xrightarrow{\Delta} A \amalg A(a \longrightarrow a + a)$$

inducerar nu

$$\chi = \Delta^* m_* : B(A \amalg A, B \amalg B) \xrightarrow{m_*} B(A \amalg A, B) \xrightarrow{\Delta^*} B(A, B)$$

så att $\chi(\xi \times \xi')$ är ett element i $B(A, B)$. Det betecknas med $\xi \cdot \xi'$ och kallas Baerprodukten av ξ och ξ'. Man kan direkt visa, att $B(A, B)$ försedd med 0 är en abelsk grupp med ① som enhetselement, men det är mycket arbetsamt.

Ett annat bevis för detta faktum samt en motivering för beteckningen Ext ges av

<u>Sats 15.</u> Det finns en naturlig bijektion

$$B(A, B) \underset{\phi}{\overset{\sim}{\longrightarrow}} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$$

som överför Baermultiplikationen i vanliga additionen i gruppen Ext.

<u>"Bevis".</u> Låt oss först definiera avbildningen ϕ.

Låt $\xi \in B(A, B)$ respresenteras av

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} A \longrightarrow 0$$

Applicera funktorn $\mathrm{Hom}_\Lambda(\cdot, B)$! Vi får en exakt svit

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(E, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(B, B) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$$

$\delta(\mathrm{Id}_B)$ är då ett element i $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$, som dessutom är obereende av valet av representant för ξ. (Detta följer av att δ är naturlig.) Sätt $\phi(\xi) = \delta(\mathrm{Id}_B)$. Vi definierar nu en avbildning

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \xrightarrow{\psi} B(A, B)$$

som kommer att bli inversen till ϕ :

Utgå från ett element $\eta \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$ och tag en maximal svit på A

$$\widetilde{\mathbb{E}} : 0 \longrightarrow \widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Vi har då en exakt svit

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\widetilde{M}, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(\widetilde{L}, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) \longrightarrow 0,$$

så att η kommer från något element i $\mathrm{Hom}_\Lambda(\widetilde{L}, B)$, som vi betecknar med h, och som inducerar en avbildning

$$B(A, \widetilde{L}) \xrightarrow{h_*} B(A, B).$$

Sätt $\psi = h_*(\widetilde{\mathbb{E}})$

Det överlämnas nu åt läsaren att bevisa relationerna

$$\psi \phi = \mathrm{Id} \quad , \quad \phi \psi = \mathrm{Id},$$

samt uttalandet om multiplikationen.

Exempel 1. Om P är projektiv, så är $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P, B) = 0$ för alla B, ty varje exakt svit $0 \to B \to E \to P \to 0$ är splittrad. Detta visste vi redan.

Man har ett motsvarande uttalande för injektiva moduler.

Exempel 2. a) Om $\Lambda = \mathbb{Z}$ så är $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_m) = \mathbb{Z}_{(n, m)}$, speciellt $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Här tillhör

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \amalg \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

nollklassen, och

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

den andra ekvivalensklassen i $\mathbb{Z}_2$.

b) $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3$.

Antag att vi har en exakt svit

$$(19) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{f} \mathcal{E} \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

Då är gruppen $\mathcal{E}$ av ordningen 9 (Bevis ?). Men de enda abelska grupperna av ordningen 9 är $\mathbb{Z}_9$ och $\mathbb{Z}_3 \amalg \mathbb{Z}_3$, och de är således de enda moduler, som kan förekomma i mitten av (19). Men enligt ovan så finns det tre ekvivalensklasser av extensioner. Av detta följer existensen av två inekvivalenta extensioner av formen

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_9 \xrightarrow{g} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0.$$

En extension är således ej fullt bestämd av modulen i mitten, utan man måste också ge homomorfismerna f och g.

Det är naturligt, att undersöka om man även kan tolka $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(A, B)$, $n > 1$, med hjälp av något slags extensioner.

Vi följer här Yoneda (Journ. Fac. Sci. Tokyo, VII, 1954, p. 193-227):

Inför $S_n(A, B)$ = alla

$$\mathbb{E} : 0 \longrightarrow B \longrightarrow E_n \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

Vi säger att $\mathbb{E} > \mathbb{E}'$ om det finns homomorfismer $E_k \xrightarrow{\varphi_k} E_k'$ så att diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_1 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_n} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}} & & \\ 0 & \longrightarrow & B & \longrightarrow & E_n' & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & E_1' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

blir kommutativt.

Detta är en reflexiv och transitiv relation på $S_n(A, B)$. Däremot är den ej symmetrisk om $n \geq 2$. Inför därför den symmetriserade relationen:

$\mathbb{E} \sim \mathbb{E}'$ $\iff$ {det finns en ändlig svit $\mathbb{E}^1, \dots, \mathbb{E}^s$, så att $\mathbb{E}$ > eller < $\mathbb{E}^1$, $\mathbb{E}^1$ > eller < $\mathbb{E}^2, \dots, \mathbb{E}^s$ > eller < $\mathbb{E}'$}.

<u>Sats 16</u> (Yoneda). Beteckna mängden av ekvivalensklasser på $S_n(A, B)$ under relationen $\sim$ med $\mathcal{Y}^n(A, B)$. Man kan införa en gruppstruktur på $\mathcal{Y}^n(A, B)$ och det finns en naturlig isomorfism

$$\mathrm{Ext}^n(A, B) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Y}^n(A, B).$$

För beviset hänvisas läsaren till Yonedas arbete eller till Sém. Grothendieck, 1957. Exp. de Cartier.

Tillämpningar av Sats 16:

1) Ibland kan man ha behov av att införa satelliter i allmännare situationer

än för moduler. Det är då ej säkert, att det finns (motsvarighet till) injektiva eller projektiva objekt. Konstruktionen av gruppen $Y^n(A, B)$ ovan går däremot ofta igenom, och man sätter då definitionsmässigt $\mathrm{Ext}^n(A, B) = Y^n(A, B)$ vilket är naturligt enligt Sats 16. Sedan kan andra satelliter fås av Ext (Se § 17). (Exempel: Algebraiska kommutativa grupper; se Serre, Groupes algébriques et corps de classes, Chap. VII.)

2) Vi har en naturlig bilineär (associativ) avbildning

$$(20) \quad \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) \times \mathrm{Hom}_\Lambda(B, C) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_\Lambda(A, C)$$

Eftersom Ext är "ett slags högre Hom", så bör vi kunna generalisera (20).

Vi definierar bilineära (associativa) avbildningar med $\varphi^{0,0} = \varphi$ på följande sätt:

$$\mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, B) \times \mathrm{Ext}^q_\Lambda(B, C) \xrightarrow{\varphi^{p,q}} \mathrm{Ext}^{p+q}_\Lambda(A, C)$$

Låt $\alpha \in \mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, B)$, $\beta \in \mathrm{Ext}^q(B, C)$ representeras av de exakta sviterna

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{j} E_p \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

och

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow F_q \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{k} B \longrightarrow 0$$

respektive. Det är lätt att sätta ihop dem till en lång exakt svit:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow F_q \longrightarrow \dots \longrightarrow F_1 \longrightarrow E_p \longrightarrow \dots \longrightarrow E_1 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

[vi tar $(F_1 \longrightarrow E_p) = j \cdot k$]. Denna långa svit representerar ett element i $\mathrm{Ext}^{p+q}_\Lambda(A, C)$, och det beror endast på α och β. (Dessutom bilineärt, ...) Följaktligen blir $\coprod_p \mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, A)$ en graderad ring, och $\coprod_p \mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, M)$ en graderad (vänster) modul över $\coprod_p \mathrm{Ext}^p_\Lambda(A, A)$. Detta resultat kan generaliseras till godtyckliga satelliter (§ 17).

§ 14. Funktorn Tor^Λ_n.

Vi ger nu en motivering för beteckningen Tor^Λ_n, åtminstone för fallet $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Som bekant är $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B) = 0$ för $n \geq 2$.

<u>Sats 17.</u> Låt A och B vara abelska grupper, A_T och B_T respektive torsionsundergrupper. Då gäller:

a) Den naturliga avbildningen

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_T, B_T) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \quad \text{är en } \underline{\text{isomorfism}}.$$

b) Gruppen A är torsionsfri (dvs. $A_T = 0$) då och endast då

$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, C) = 0$ för alla C.

<u>Bevis.</u> Låt oss först betrakta fallet att A och B är ändligt genererade. Då är $A = A_T + A_F$ och $B = B_T + B_F$, där A_F och B_F är fria grupper. Detta följer ur struktursatsen för ändligt genererade grupper. (Uppdelningen i direkt summa är dock ej kanonisk.) Eftersom $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\cdot, F) = 0$ och $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F, \cdot) = 0$ då F är fri, så följer a) och halva b) i det ändligt genererade fallet.

Resten av b): Om $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, C) = 0$ för alla C så är A torsionsfri, bevisas lätt direkt i det allmänna fallet: Om $A \neq 0$ hade torsion, så funnes nämligen en ändlig cyklisk undergrupp till A skild från noll, säg $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n > 1)$. Men

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, C) \quad \text{är exakt} \quad (\mathrm{Tor}_2^{\mathbb{Z}} = 0),$$

så att $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, C) = 0$ för alla C. Detta är omöjligt för den exakta sviten

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot n} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ger en ny exakt svit:

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_n, C) \longrightarrow C \longrightarrow C \longrightarrow C/nC \longrightarrow 0$$

Av denna följer att $C \xrightarrow{n} C$ är injektiv för alla C, vilket uppenbarligen är omöjligt. (Välj t.ex. $C = \mathbb{Z}_n$).

För att bevisa resten av Sats 17 i det allmänna fallet, räcker det nu att visa, att att om Pl är en godtycklig abelsk grupp utan torsion, så är $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(Pl, C) = 0$ för alla C. För att göra detta skall vi approximera Pl med sina ändligt genererade undergrupper. Allmänt är en godtycklig abelsk grupp A lika med föreningsmängden av sina ändligt genererade undergrupper A_α. och $\bigcup_\alpha \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A_\alpha, C) \subset \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, C)$.

I nästa paragraf skall visas, att

$$\bigcup_\alpha \operatorname{Tor}_1(A_\alpha, C) = \operatorname{Tor}_1(\bigcup_\alpha A_\alpha, C).$$

(En kontinuitetssats för Tor.)

Detta resultat medför nu lätt, att $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(Pl, C) = 0$.

En undergrupp U till Pl saknar nämligen också torsion, och U är således fri, om U är ändligt genererad. Alltså $Pl = \bigcup F_\alpha$, där alla F_α är fria.

Härav följer att

$$\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(Pl, C) = \bigcup_\alpha \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(F_\alpha, C) = 0 \qquad \text{VSB.}$$

Övning. Låt X vara ett topologiskt rum, och $H_n(X, G)$ de singulära homologigrupperna till X av ordningen n med koefficienter i G. Visa, att

$$H_n(X, \mathbb{Z}_m) \cong H_n(X)/mH_n(X) \amalg \operatorname{Ker}(H_{n-1}(X)_T \xrightarrow{m} H_{n-1}(X)_T)$$

§ 15. Teori för induktivt limes.

I föregående paragraf behövde vi ett resultat om hur funktorn $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ kommuterar med $\bigcup$. Vi skall nu bevisa ett allmännare resultat $\operatorname{Tor}_n^{\mathbb{Z}}$ och för ett slags generaliserade föreningsmängder.

Låt M vara en modul över en ring Λ. Mängden av alla ändligt genererade undermoduler till M är ett exempel på ett allmännare matematiskt objekt ett induktivt system, som vi nu skall definiera.

Definition. Låt I vara en ordnad mängd. Ett I-induktivt system av Λ-moduler definieras av två givna saker:

1) En avbildning, som till varje $\alpha \in I$ ordnar en Λ-modul M_α.
2) En avbildning, som till varje par av objekt (α, β) i I, så att $\alpha < \beta$, ordnar en homomorfism $M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha^\beta} M_\beta$

Dessutom fordras, att (i_α^β) satisfierar axiomet:

IND. a) $i_\alpha^\alpha = \mathrm{Id}_{M_\alpha}$, b) om $\alpha < \beta < \gamma$ så är $i_\beta^\gamma \, i_\alpha^\beta = i_\alpha^\gamma$

(transitivitet)

Exempel: Låt M vara en Λ-modul, och I = alla ändligt genererade undermoduler till M. Ordna I genom inklusion i M: $N < N' \Leftrightarrow N \subset N'$. Till varje $\alpha \in I$ ordnas modulen α själv. (Vi betecknar den med M_α för att undvika sammanblandning.) Avbildningen $M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha^\beta} M_\beta$ för $\alpha < \beta$ är helt enkelt den naturliga inklusionen. Det är klart, att axiomen är uppfyllda.

Dessutom är det klart, att M i någon mening är gränsvärdet av $\{M_\alpha, i_\alpha^\beta\}$.

För ett godtyckligt induktivt system vill vi nu införa ett motsvarande gränsvärde, induktivt limes. (Observera, att i definitionen av induktivt system, så fordras ej att i_α^β skall vara monomorfismer.)

Definition och sats. Låt $(M_\alpha, i_\alpha^\beta)$ vara ett I-induktivt system av Λ-moduler. Betrakta problemet att finna en familj av avbildningar

$$M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha} M \quad (M \text{ en fixerad } \Lambda\text{-modul}), \text{ så att diagrammen}$$

$$(\mathfrak{A}) \qquad \begin{tikzcd} M_\beta \arrow[dr, "i_\beta"] & \\ & M, \quad (\alpha < \beta) \\ M_\alpha \arrow[uu, "i_\alpha^\beta"] \arrow[ur, "i_\alpha"'] & \end{tikzcd}$$

blir kommutativa. Detta problem har en lösning $(\widetilde{M}, \widetilde{i}_\alpha)$, som är universell i den meningen att

1) $(\widetilde{M}, \widetilde{i}_\alpha)$ satisfierar villkoret $(\mathfrak{A})$

2) För varje annat par (M, i_α) som satisfierar $(\mathfrak{A})$, så finns det en entydigt bestämd homomorfism $\widetilde{M} \xrightarrow{\varphi} M$ så att

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[dd, "\varphi"] \\ M_\alpha \arrow[ur, "\widetilde{i}_\alpha"] \arrow[dr, "i_\alpha"'] & \\ & M \end{tikzcd}$$

blir kommutativt.

Paret $(\tilde{M}, \tilde{i}_\alpha)$ är då entydigt bestämt sånär som på en entydigt bestämd isomorfism (allmän egenskap hos lösningar till universella problem). Man kan konstruera ett kanoniskt par, (se nedan), och man kallar motsvarande $\tilde{M}$ för induktivt limes av $(M_\alpha, i_\alpha^\beta)$ och vi skriver det som

$$\varinjlim (M_\alpha, i_\alpha^\beta) \quad \text{eller} \quad \varinjlim_I M_\alpha$$

(Det är klart, att i exemplet ovan, så är M induktivt limes av M_α.)

Bevis för satsen. Inför $\coprod_0 M = \coprod_\alpha M_\alpha$ och $\coprod_1 M = \coprod_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha<\beta}} M_{\alpha,\beta}$ där vi infört beteckningen $M_{\alpha\beta}' = M_\alpha (\alpha < \beta)$

Definiera en Λ-homomorfism

$$\coprod_1 M \xrightarrow{d_0} \coprod_0 M$$

genom sitt värde på varje summand $\coprod_1 M$:

$$M_{\alpha\bar{\beta}} \xrightarrow{(Id, -i_\alpha^\beta)} M_\alpha + M_\beta \xrightarrow{i} \coprod_0 M$$

där i är den naturliga injektionen. Injektionen $M_\alpha \longrightarrow \coprod_0 M$ definierar naturliga avbildningar $M_\alpha \xrightarrow{i_\alpha}$ Coker d_0, och det överlämnas åt läsaren att visa, att (Coker d_0, i_α) är en universell (kanonisk) lösning till problemet ovan.

Vi har alltså en exakt svit

$$(22) \qquad \coprod_1 M \xrightarrow{d_0} \coprod_0 M \longrightarrow \varinjlim_I M_\alpha \longrightarrow 0$$

Ett specialfall av $\varinjlim$ är $\coprod_I$ (varför?), och (22) visar hur det allmänna fallet kan återföras på detta specialfall.

Låt nu (M_α) vara ett induktivt system av (vänster) Λ-moduler, och A en höger Λ-modul. Då är $(A \otimes_\Lambda M_\alpha)$ ett induktivt system av abelska grupper.

Vi har kanoniska avbildningar

$$M_a \longrightarrow \varinjlim M_a$$

alltså även homomorfismer:

$$A \underset{\wedge}{\otimes} M_a \longrightarrow A \underset{\wedge}{\otimes} \varinjlim M_a$$

och de satisfierar kommutationsrelationerna (21) ovan. Det finns således enligt den universella karakteriseringen av $\varinjlim$, en entydigt bestämd avbildning

$$\varinjlim (A \underset{\wedge}{\otimes} M_a) \xrightarrow{\varphi} A \underset{\wedge}{\otimes} \varinjlim M_a$$

Sats 19. Den naturliga homomorfismen

$$\varinjlim (A \underset{\wedge}{\otimes} M_a) \xrightarrow{\varphi} A \underset{\wedge}{\otimes} \varinjlim M_a .$$

är en isomorfism.

Bevis. Eftersom oändliga summor är ett specialfall av $\varinjlim$, så finns det också naturliga avbildningar

$$\coprod_1 (A \underset{\wedge}{\otimes} M) \xrightarrow{\varphi(1)} A \otimes \coprod_1 M \quad \text{och}$$

$$\coprod_0 (A \underset{\wedge}{\otimes} M) \xrightarrow{\varphi(0)} A \otimes \coprod_0 M.$$

Dessa avbildningar är isomorfismer. (Följer lätt ur definitionen av tensorprodukt.)

Vi har nu ett kommutativt diagram:

$$\begin{tikzcd}
\coprod_1 (A \underset{\wedge}{\otimes} M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(1)"] & \coprod_0 (A \underset{\wedge}{\otimes} M) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(0)"] & \varinjlim (A \underset{\wedge}{\otimes} M_a) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 0 \\
A \underset{\wedge}{\otimes} \coprod_1 M \arrow[r] & A \underset{\wedge}{\otimes} \coprod_0 M \arrow[r] & A \underset{\wedge}{\otimes} \varinjlim M_a \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ur definitionen av $\varinjlim$ följer att den första raden är exakt. Likaså är den andra raden exakt (definitionen av $\varinjlim$ och högerexakthet hos $\underset{\wedge}{\otimes}$).

Men vi har just påpekat, att de två första vertikala homomorfismerna är isomorfismer. Då måste också φ vara det. (Bevis?). VSB.

Låt oss nu försöka utvidga Sats 19 till de "högre tensorprodukterna" $\hat{\mathrm{Tor}}_i$.

På samma sätt som förut definieras avbildningar

$$\varinjlim \widehat{\mathrm{Tor}}_i(A, M_\alpha) \xrightarrow{\varphi_i} \widehat{\mathrm{Tor}}_i(A, \varinjlim M_\alpha), \quad i > 0 .$$

<u>Sats 20.</u> Avbildningen φ_i är en isomorfism om I är filtrerande, dvs. om det till varje par $(\alpha, \beta) \in I$ existerar ett $\gamma \in I$ så att $\alpha < \gamma$ och $\beta < \gamma$.

<u>Förberedelse till beviset.</u> Det är lätt att se, att avbildningen φ_i också kan definieras på följande sätt: låt P_* vara en fix projektiv upplösning av A. Vi har enligt sats 19 en kanonisk isomorfism mellan komplex:

$$\varinjlim (P_* \hat{\otimes} M_\alpha) \xrightarrow{\sim} P_* \hat{\otimes} \varinjlim M_\alpha .$$

Denna inducerar en isomorfism för homologigrupperna

$$H_i(\varinjlim (P_* \hat{\otimes} M_\alpha)) \xrightarrow{\tau_i} \widehat{\mathrm{Tor}}_i(A, \varinjlim M_\alpha).$$

Men man definierar på samma sätt som ovan en naturlig avbildning

$$\varinjlim H_i(P_* \hat{\otimes} M_\alpha) \xrightarrow{h_i} H_i(\varinjlim (P_* \hat{\otimes} M_\alpha))$$

och $\varphi_i = \tau_i h_i$.

Vi har alltså återfört hela problemet på studiet av kommutering mellan H_i och $\varinjlim$:

Låt $(K_{*\alpha}, i_{*\alpha}^{\beta})$ vara ett I-induktivt system av komplex, dvs. $i_{*\alpha}^{\beta} = (i_{n\alpha}^{\beta}) : K_{*\alpha} \longrightarrow K_{*\beta}$ är avbildningar för komplex (kommuterar med differentialerna), som satisfierar IND.

Vi får för varje α exakta sviter

$$0 \longrightarrow Z_n(K_{*\alpha}) \longrightarrow K_{n\alpha} \longrightarrow B_{n-1}(K_{*\alpha}) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow B_n(K_{*\alpha}) \longrightarrow Z_n(K_{*\alpha}) \longrightarrow H_n(K_{*\alpha}) \longrightarrow 0$$

Homomorfismerna $i_{*\alpha}^{\beta}$ inducerar dessutom homomorfismer

$$Z_n(K_{*\alpha}) \xrightarrow{Z_n(i_{*\alpha}^{\beta})} Z_n(K_{*\beta}), \quad B_{n-1}(K_{*\alpha}) \xrightarrow{B_{n-1}(i_{*\alpha}^{\beta})} B_{n-1}(K_{*\beta}), \ \ldots .$$

så att

$$
(23) \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n(K_{*\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & K_{n\alpha} \arrow[r] \arrow[d] & B_{n-1}(K_{*\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z_n(K_{*\beta}) \arrow[r] & K_{n\beta} \arrow[r] & B_{n-1}(K_{*\beta}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

och

$$
(24) \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n(K_{*\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & Z_n(K_{*\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & H_n(K_{*\alpha}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n(K_{*\beta}) \arrow[r] & Z_n(K_{*\beta}) \arrow[r] & H_n(K_{*\beta}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

blir kommutativa. Det är klart, att $(Z_n(K_{*\alpha}), Z_n(i_{*\alpha}^{\beta}))$, $(K_{n\alpha}, i_{n\alpha}^{\beta})$, ... är I-induktiva system och att (23) och (24) i någon mening är exakta sviter av I-induktiva system.

Vi leds nu till problemet att undersöka hur $\varinjlim$ transformerar sådana exakta sviter, dvs. till studiet av funktoriella egenskaper hos $\varinjlim_{I}$ då I hålles fix.

Vi preciserar först våra begrepp i en

<u>Definition:</u> Låt $(M_\alpha, m_\alpha^\beta)$ och $(N_\alpha, n_\alpha^\beta)$ vara två I-induktiva system av Λ-moduler, och $M_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} N_\alpha$ en familj av Λ-homomorfismer. Vi säger, att $h = (h_\alpha)$ är en <u>homomorfism av induktiva system</u>, om diagrammen

$$
\begin{tikzcd}
M_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[d, "m_\alpha^\beta"'] & N_\alpha \arrow[d, "n_\alpha^\beta"] \\
M_\beta \arrow[r, "h_\beta"] & N_\beta
\end{tikzcd}
$$

är kommutativa för alla par α, β med $\alpha < \beta$.

Bildningen

$$
\mathcal{M}_\Lambda^I = \left\{ \begin{array}{l} \text{"Alla" I-induktiva system av } \Lambda\text{-moduler} \\ \text{och alla homomorfismer mellan I-induktiva} \\ \text{system .} \end{array} \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \Lambda \text{ fix,} \\ \text{I fix.} \end{array} \right)
$$

liknar i mångt och mycket $\mathcal{M}_\Lambda$, och man kan införa Ker h, Coker h etc. för homomorfismer mellan induktiva system, exakta sviter, projektiva

objekt, funktorer från $\mathcal{M}_\Lambda^I$ till $\mathcal{M}_\Lambda$, satelliter av dessa funktorer etc.
I kapitel 4 och 5 kommer vi att träffa på ännu en sådan bildning: bladverk (faisceaux) av abelska grupper och homomorfismer mellan bladverk på ett fixt topologiskt rum X. I det sista kapitlet skall vi exakt fastlägga i vilket allmänt fall man verkligen kan genomföra den föregående teorien från kapitel 3.

Vi påpekar bara, att de exakta sviterna (23,24) bildar exempel på exakta sviter av induktiva system.

Låt nu $(M_\alpha) \xrightarrow{h=(h_\alpha)} (N_\alpha)$ vara en homomorfism för induktiva system.

Det är klart, att h definierar avbildningar

$$\coprod_0 M \xrightarrow{\coprod_0 h} \coprod_0 N \quad \text{och} \quad \coprod_1 M \xrightarrow{\coprod_1 h} \coprod_1 N$$

Det finns då en och endast en homomorfism $\varinjlim M_\alpha \longrightarrow \varinjlim N_\alpha$, som gör diagrammet

$$\begin{tikzcd}
\coprod_1 M \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_1 h"] & \coprod_0 M \arrow[r] \arrow[d, "\coprod_0 h"] & \varinjlim M_\alpha \arrow[r] \arrow[d, dashed] & 0 \\
\coprod_1 N \arrow[r] & \coprod_0 N \arrow[r] & \varinjlim N_\alpha \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutativt. Den betecknar vi med $\varinjlim h_\alpha$.

Det är lätt att se, att $(\varinjlim M_\alpha, \varinjlim h_\alpha)$ definierar en <u>kovariant funktor</u> från $\mathcal{M}_\Lambda^I$ till $\mathcal{M}_\Lambda$.

Den är dessutom additiv. För att bevisa sats 20 så behöver vi

<u>Sats 21.</u> Funktorn $\varinjlim$ är alltid högerexakt. Den är exakt om I är filtrerande.

<u>Bevis:</u> Låt

$$0 \longrightarrow (L_\alpha, l_\alpha^\beta) \xrightarrow{(h_\alpha)} (M_\alpha, m_\alpha^\beta) \xrightarrow{(k_\alpha)} (N_\alpha, n_\alpha^\beta) \longrightarrow 0$$

vara en exakt svit av induktiva system. Vi får, som det är lätt att se, en exakt svit av Λ-moduler

$$0 \longrightarrow \coprod_0 L \xrightarrow{\coprod_0 h} \coprod_0 M \xrightarrow{\coprod_0 k} \coprod_0 N \longrightarrow 0 ,$$

och samma sak gäller för $\coprod_1$, varav följer, att det kommutativa diagrammet

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \coprod_1 L & \longrightarrow & \coprod_1 M & \longrightarrow & \coprod_1 N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow d_0(L) & & \downarrow d_0(M) & & \downarrow d_0(N) & & \\
0 & \longrightarrow & \coprod_0 L & \longrightarrow & \coprod_0 M & \longrightarrow & \coprod_0 N & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

har exakta rader. Enligt lemma 1, så får vi då en exakt svit (omkommat)

$$\varinjlim L_\alpha \longrightarrow \varinjlim M_\alpha \longrightarrow \varinjlim N_\alpha \longrightarrow 0 ,$$

dvs. $\varinjlim$ är högerexakt.

Låt nu I vara filtrerande och tag ett $\lambda \in \varinjlim L$ så att $(\varinjlim h_\alpha)(\lambda) = 0$. Det finns ett β så att λ kommer från ett $\lambda_\beta \in L_\beta$ vid avbildningen

$$L_\beta \longrightarrow \varinjlim L_\alpha$$

(Lemma 5 nedan.). Men $h_\beta(\lambda_\beta) \in M_\beta \in \coprod_0 M$ avbildas då på 0 av $M_\beta \longrightarrow \varinjlim M_\alpha$.

Detta följer av det kommutativa diagrammet

$$\begin{array}{ccc}
\coprod_0 L & \xrightarrow{(h_\alpha)} & \coprod_0 M \\
\downarrow & & \downarrow \\
\varinjlim L_\alpha & \xrightarrow{\varinjlim h_\alpha} & \varinjlim M_\alpha \\
\downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0
\end{array}$$

Enligt lemma 6 nedan finns det då ett $\beta' > \beta$ så att $m_\beta^{\beta'}(h_\beta(\lambda_\beta)) = 0$, varav följer, att

$$h_{\beta'}(1_\beta^{\beta'}(\lambda)) = m_\beta^{\beta'}(h_\beta(\lambda)) = 0, \quad \text{dvs.} \quad 1_\beta^{\beta'}(\lambda) = 0 \quad (h_{\beta'} \text{ är injektiv})$$

och *a fortiori* $\lambda = 0$.

Sats 21 är således bevisad modulo två lemmata:

Lemma 5. Låt $(M_\alpha, i_\alpha^\beta)$ vara ett I-induktivt system med I filtrerande. Till varje $\tilde{\mu} \in \varinjlim M_\alpha$ finns då ett β och ett $\mu_\beta \in M_\beta$ så att

$$\mu = i_\beta(\mu_\beta) \qquad \text{där} \qquad M_\beta \xrightarrow{i_\beta} \varinjlim M_\alpha \qquad \text{är den}$$

naturliga avbildningen.

Bevis: Sviten $\coprod_0 M \xrightarrow{\Sigma i_\alpha} \varinjlim M_\alpha \longrightarrow 0$ är exakt, så det existerar ett $\tilde{\mu} \in \coprod_0 M$ med $(\Sigma i_\alpha)(\tilde{\mu}) = \mu$. Men $\tilde{\mu} = \Sigma \tilde{\mu}_\alpha$ där $\tilde{\mu}_\alpha = 0$ för nästan alla α (definition av $\coprod$). Eftersom I är filtrerande så finns det ett β större än de ändligt många α för vilka $\tilde{\mu}_\alpha \neq 0$.

Elementet $\mu_\beta = \Sigma i_\alpha^\beta(\tilde{\mu}_\alpha)$ tillhör då M_β och $i_\beta(\mu_\beta) = 0$. VSB.

Lemma 6. Låt (M_α) vara som i lemma 5. Om $\mu_\beta \in M_\beta$ och $i_\beta(\mu_\beta) = 0$, så finns det $\beta' > \beta$ så att $i_\beta^{\beta'}(\mu_\beta) = 0$.

Bevis: $M_\beta \subset \coprod_0 M$, och sviten

$$\coprod_1 M \xrightarrow{d_0(M)} \coprod_0 M \xrightarrow{\Sigma i_\alpha} \varinjlim M_\alpha \longrightarrow 0$$

är exakt. Härav följer existensen av ett ändligt antal par

$$(\alpha_\nu, \beta_\nu)_{\nu=1}^n, \quad \alpha_\nu < \beta_\nu \quad \text{och element } \mu_{\alpha_\nu \beta_\nu} \in M_{\alpha_\nu \beta_\nu} = M_{\alpha_\nu}$$

så att

$$\mu_\beta = \sum_{\nu=1}^{n} (\mu_{\alpha_\nu \beta_\nu} - i_{\alpha_\nu}^{\beta_\nu} \mu_{\alpha_\nu \beta_\nu}) \qquad (i \coprod_0 M).$$

Tag ett $\beta' >$ alla β_ν. Det överlämnas åt läsaren, att visa att $i_\beta^{\beta'}(\mu_\beta) = 0$.

Det är nu lätt att avsluta beviset för sats 20. Om nämligen I är filtrerande så är, som vi nyss sett, $\varinjlim$ exakt. Om man tar $\varinjlim$ av sviterna (23), (24) så får man alltså nya exakta sviter, vilka ger det önskade resultatet.

Det är klart att situationen i § 14 är filtrerande. Det resultat om $\cup$ och $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$, som vi behövde för beviset av Sats 17, följer nu ur Sats 20 (med $\Lambda = \mathbb{Z}$). Om I ej är filtrerande, så är den naturliga avbildningen φ_i i Sats 17 i allmänhet ej en isomorfism. Man leds till att införa vänstersatelliterna $\varinjlim_{(i)}$ av $\varinjlim$ och kommuteringsrelationen ersättes då av två s.k. spektralsviter, som konvergerar mot samma sak, och har resp. första termer lika med

$$\varinjlim_{(p)} \mathrm{Tor}_q^{\Lambda}(A, M_\alpha) \quad \text{och} \quad \mathrm{Tor}_p^{\Lambda}(A, \varinjlim_{(q)} M).$$

Funktorn $\varinjlim$ spelar en stor roll vid studiet av Čech-kohomologien. (Kap. 5)

§ 16. <u>Projektivt limes.</u>

Om man dualiserar situationen i § 15, så leds man till begreppen projektivt system och projektivt limes:

Ett I-projektivt system definieras således av $(M_\alpha, p_\alpha^\beta)$ varvid p_α^β går åt andra hållet:

$$M_\beta \xrightarrow{p_\alpha^\beta} M_\alpha \quad \text{för} \quad \beta > \alpha .$$

Projektivt limes $\varprojlim M_\alpha$ har egenskapen att det finns homomorfismer $\varprojlim M_\alpha \xrightarrow{h_\alpha} M_\alpha$ så att

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim M_\alpha \arrow[r, "h_\alpha"] \arrow[dr, "h_\alpha"'] & M_\beta \arrow[d, "p_\alpha^\beta"] \\
& M_\alpha
\end{tikzcd}$$

är kommutativt och $\varprojlim$ är universellt för denna egenskap. Specialfall: oändlig produkt. Kategorien av projektiva system införes som tidigare, och $\varprojlim$ blir en funktor från dem till $\mathcal{M}_\Lambda$.

<u>Sats 22.</u> Funktorn $\varprojlim$ är kovariant, additiv och <u>vänsterexakt</u>.

<u>Bevis:</u> Övning.

Anm. Däremot är i allmänhet $\varprojlim$ ej högerexakt, ej ens om I är filtrerande.

Vi ser således ånyo att $\mathcal{M}$ ej är självdual; "den ena sidan är favoriserad". Detta beröres närmare i Kapitel 6.

Högersatelliterna av $\varprojlim$ bör därför spela en stor roll, men det är först på senare tid, som man börjat studera dem ([1] Z. Z. Yeh, Avh. Princeton 1959, [2] Nöbeling, Topology, 1, 1962, p. 47-63, [3] J. E. Roos, Comptes Rendus de l'Ac. de Sc. 252, 1961, p. 3702, 254, 1962, p. 1556 och 254, 1962, p. 1720.) Som exempel på resultat, låt oss endast nämna följande [3]:

Låt A vara en ändligt genererad abelsk grupp, och (B_α) ett I-projektivt system av ändligt genererade abelska grupper (I filtrerande). Det finns då en exakt svit

$$0 \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \varprojlim B_\alpha \longrightarrow \varprojlim (A \otimes_{\mathbb{Z}} B_\alpha) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \varprojlim^{(1)} B_\alpha) \longrightarrow 0$$

Dessutom gäller [3], att $\varprojlim^{(1)} B$ är en injektiv abelsk grupp, alltså direkt summa av $\mathbb{Z}_{p_\infty}$ och $\mathbb{Q}$. Men $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}) = 0$ ($\mathbb{Q}$ saknar torsion), och $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}_{p_\infty}) = A_p$ = p-torsionsundergruppen av A.

Funktorerna $\varprojlim^{(i)}$, $i \geq 1$ uppträder naturligt, då man vill dualisera $\check{C}$ech-kohomologien, så att man får en homologiteori, som satisfierar exakthetsaxiomet. Motsvarande sak gäller för Grothendiecks kohomologiteori. Dessutom kommer $\varprojlim^{(i)}$ naturligt in i studiet av Weilkohomologien.

§ 17. Precisering av den roll, som funktorerna Ext och Tor spelar i den homologiska algebran.

Låt oss börja, med att visa, att $\otimes$ är den enda funktor, som kommuterar väl med induktivt limes.

Sats 23. Låt T vara en kovariant (a priori ej nödvändigtvis additiv) funktor från Λ-moduler till $\mathbb{Z}$-moduler. Antag, att den naturliga homomorfismen

$$\underset{\longrightarrow}{\lim}\, T(A_\alpha) \longrightarrow T(\underset{\longrightarrow}{\lim}\, A_\alpha)$$

är en isomorfism för varje induktivt system A (I varierar också.). Då finns det en höger-Λ-modul B, och en naturlig isomorfism av funktorer

$$T(\cdot) \xrightarrow{\sim} B \otimes_\Lambda \cdot$$

(T är således speciellt additiv och högerexakt.)

Bevis. Att T är additiv är klart, för $A \amalg B$ är induktivt limes av A och B. Alltså är speciellt $T(0) = 0$. Låt nu $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ vara en exakt svit. Den definierar ett induktivt system

$$\begin{tikzcd} B & & 0 \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}, \quad \text{vars induktiva limes är } B/f(A) \xrightarrow[\sim]{\bar{g}} C$$

Enligt förutsättningen, så är

$$\underset{\longrightarrow}{\lim}\left(\begin{tikzcd} T(B) & & 0 \\ & T(A) \arrow[ul, "T(f)"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right) \xrightarrow{\sim} T\left(\underset{\longrightarrow}{\lim} \left(\begin{tikzcd} B & & 0 \\ & A \arrow[ul, "f"] \arrow[ur] & \end{tikzcd} \right)\right)$$

så att $\quad T(B)/\mathrm{Im}(T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B)) \xrightarrow[\sim]{T(g)} T(C)$,

dvs. $\quad T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{T(g)} T(C) \longrightarrow 0$

är exakt.

(Vi har hittills endast använt, att T kommuterar med ändliga induktiva limes; detta är i själva verket ekvivalent med att T är additiv och höger-exakt.

Det är klart, att om $T(M) \xrightarrow{\sim} B \otimes_{\Lambda} M$ för någon höger Λ-modul B så måste vi ha speciellt

$$T(\Lambda) \xrightarrow{\sim} B \otimes_{\Lambda} \Lambda \xrightarrow{\sim} B.$$

Vi försöker därför nu införa en höger Λ -modulstruktur på $T(\Lambda)$. Detta är enkelt för

$$\Lambda \xrightarrow{\cdot\,\lambda} \Lambda$$

(multiplikation till höger med λ)

definierar en Λ -homomorfism. Alltså får vi en grupphomomorfism

$$T(\Lambda) \xrightarrow{T(\cdot\,\lambda)} T(\Lambda)$$

Låt nu $\nu \in T(\Lambda)$ och sätt $\nu \cdot \lambda = T(\cdot\,\lambda)(\nu)$.

Vi får då en höger Λ -modulstruktur på $T(\Lambda)$, så vi kan definiera funktorn

$$U(M) = T(\Lambda) \otimes_{\Lambda} M.$$

Dessutom finns det en naturlig transformation av funktorer

$$U(M) \xrightarrow{\phi(M)} T(M)$$

definierad på följande sätt:

Låt $m \in M$ och $c \in T(\Lambda)$ och sätt

$$\phi(c \otimes_{\Lambda} m) = T(\overline{m})(c) \quad \text{där} \quad \overline{m} : \Lambda \ni \lambda \longrightarrow \lambda \cdot m \in M.$$

$\phi(\Lambda)$ är en isomorfism, men eftersom U och T båda kommuterar med oändliga summor, så är $\phi(F)$ en isomorfism för varje fri Λ -modul F.

Härav följer, att $\phi(M)$ är en isomorfism för ett godtyckligt M:

Det finns en exakt svit

$$F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \quad \text{där } F_i \text{ är fria.}$$

Eftersom T och U är högerexakta, och ϕ naturlig, så får vi ett kommutativt diagram med exakta rader

$$\begin{array}{ccccccc} U(F_1) & \longrightarrow & U(F_o) & \longrightarrow & U(M) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & \phi(F_1) & \downarrow & \phi(F_o) & \downarrow & \phi(M) & \\ T(F_1) & \longrightarrow & T(F_o) & \longrightarrow & T(M) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

här är, som vi tidigare sett, $\phi(F_o)$ och $\phi(F_1)$ isomorfismer. Men då måste även $\phi(M)$ vara det. V.S.B.

Övning: Bevisa följande resultat:

Om T är en kontravariant funktor från Λ -moduler till $\mathbb{Z}$ -moduler, så att den naturliga avbildningen

$$T(\varinjlim M_a) \longrightarrow \varprojlim T(M_a)$$

är en isomorfism för varje induktivt system och för varje I, så gäller, att det finns en Λ -modul T och en naturlig isomorfism av funktorer:

$$T(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\Lambda}(M, T)$$

Karakterisera på liknande sätt funktorn $\mathrm{Hom}_{\Lambda}(S, \cdot)$.

De föregående resultaten härör sig väsentligen från S. Eilenberg, Abstract description of some basic functors, Journ. Ind. Math. Soc. 24, 1960, p. 231-234, och C.E. Watts, Proc. Am. Math. Soc. 12, 1961. Se även Gabriel, Thèse, Paris 1961. (Kommer att publiceras i Bull. Soc. Math. France, 90, fasc. 3, 1962.)

Låt oss slutligen ge en formel av Yoneda, |Journal Fac. Sci. Tokyo, 8, 1960, p. 507-77 (se även Hilton-Rees, Proc. Cambr. Philos. Soc. 57, 1961, p. 489-503)|, som visar hur vänstersatelliterna av en godtycklig kovariant additiv funktor kan beräknas med hjälp av Ext^n_{Λ}. Först en beteckning:

Låt F och G vara två godtyckliga kovarianta funktorer från Λ -moduler till $\mathbb{Z}$ -moduler. Definiera

Nat(F, G) = den abelska gruppen av alla naturliga homomorfismer

$$F \longrightarrow G .$$

Sats 24 (Yoneda). Låt T vara en kovariant halvexakt additiv funktor från Λ-moduler till $\mathbb{Z}$-moduler. Då är

$$S_n T(A) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Ext}^n(A, \cdot), \ T(\cdot)).$$

Speciellt är således: $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, B) = \mathrm{Nat}(\mathrm{Ext}^n_{\Lambda}(A, \cdot), \quad \otimes_{\Lambda} B)$.

Läsaren uppmanas, att bevisa detta som övning, och att formulera och bevisa motsvarande resultat för högersatelliter, kontravarianta fallet etc. Av dessa formler följer t.ex. att $\coprod_{n \geq 0} S^n T(M)$ är en graderad modul över ringen $\coprod_{n \geq 0} \mathrm{Ext}^n_{\Lambda}(M, M)$ (se §13).

De "väsentliga" funktorerna i den additiva homologiska algebran är således Hom, $\otimes$, $\varinjlim$, $\varprojlim$ och deras satelliter. Men Hom och $\otimes$ kan tolkas som ett $\varprojlim$ resp. $\varinjlim$ i lämpligt generaliserad mening ....

Författaren kommer att behandla det icke additiva fallet i en senare publikation.